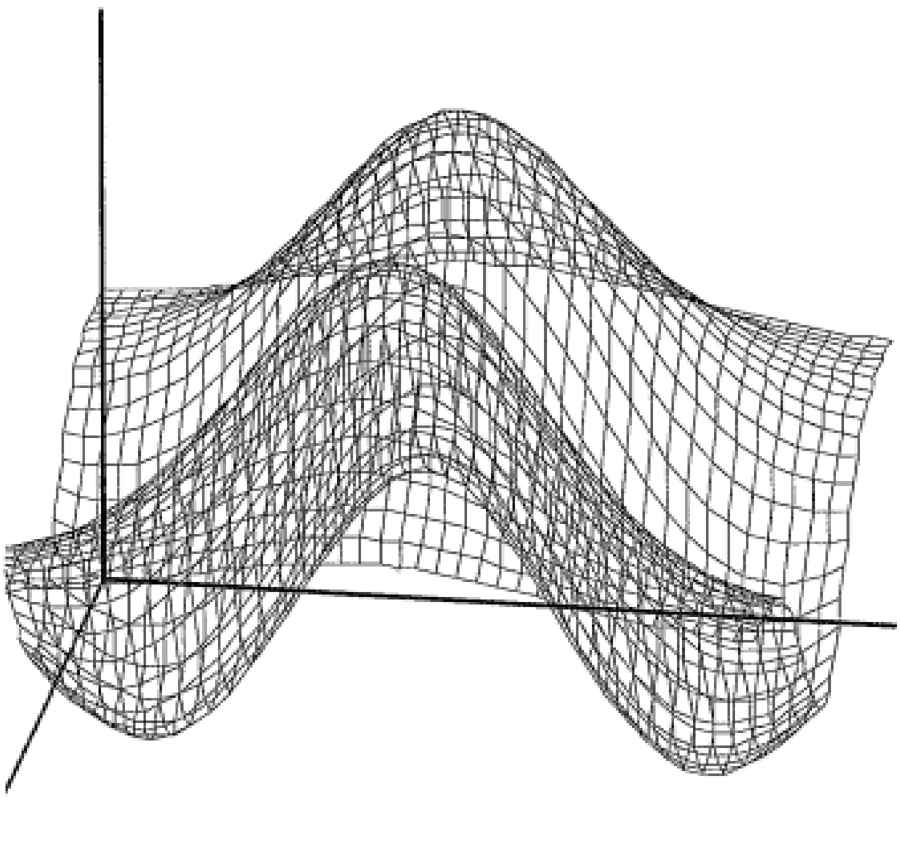
MATLAB

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen

Timo Mäkelä



Tammertekniikka

14. LINEAARISEN YHTÄLÖRYHMÄN RATKAISEMINEN

14.1 Yleistä

Lineaarinen yhtälöryhmä, jossa on m **yhtälöä ja** n **tuntematonta**, on muotoa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

missä $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat tuntemattomia ja suureet a_{ij} ja b_i ovat tunnettuja. Yhtälöryhmä voidaan esittää matriisimuodossa seuraavasti:

$$A\underline{x} = \underline{b}, \qquad (*)$$

missä

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matriisia A sanotaan yhtälöryhmän **kerroinmatriisiksi**.

Yhtälöryhmää sanotaan **neliöllliseksi**, jos tuntemattomia on yhtä monta kuin yhtälöitä. Neliöllisen yhtälöryhmän kerroinmatriisi on neliömatriisi.

14.2 Yksikäsitteinen ratkaisu

Tarkastellaan neliöllistä yhtälöryhmää, jossa on n **yhtälöä ja** n **tuntematonta**.

Yhtälöryhmän matriisimuotoisessa esityksessä

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

kerroinmatriisi A on $n \times n$-neliömatriisi.

Jos $\det(A) \neq 0$, niin matriisilla A on käänteismatriisi A^{-1}. Tällöin yhtälöryhmällä

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

on **1-käsitteinen ratkaisu**

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$$

MATLABissa ratkaisu voidaan laskea yllä esitetyllä tavalla, mutta tehokkaampi tapa on käyttää *jakoa vasemmalta*:

$$\underline{x} = A \backslash \underline{b}.$$

Jos $\det(A) = 0$, niin komento $A\backslash\underline{b}$ antaa varoituksen.

Esim. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4x + 6y - 2z = 2 \\ 3x + 3y + z = -4 \end{cases}$$

Muodostetaan kerroinmatriisi ja pystyvektori:

```
>> A = [1 -2 3
4 6 -2
3 3 1]
A =
        1      -2       3
        4       6      -2
        3       3       1

>> b = [1; 2; -4]
b =
        1
        2
       -4
```

Ratkaistaan yhtälöryhmä:

```
>> x = A\b
x =
      6.4286
     -5.8571
     -5.7143
```

Siis

$$\begin{cases} x = 6{,}4286 \\ y = -5{,}8571 \\ z = -5{,}7143 \end{cases}$$

Tarkistetaan vielä tulos:

```
>> A*x
ans =
      1.0000
      2.0000
     -4.0000
```

TEHTÄVIÄ

1. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + z = 7 + 3y \\ -2x + y + 6 = 8z \\ 3x + y + z = -5 \end{cases}$$

Tarkista tulos.

14.3 Ylimääräytynyt lineaarinen yhtälöryhmä

Ylimääräytyneessä lineaarisessa yhtälöryhmässä on yhtälöiden määrä m suurempi kuin tuntemattomien määrä n. Yhtälöryhmän matriisiesitys on siten

$$A\underline{x} = \underline{b},$$

missä kerroinmatriisi A on $m \times n$-matriisi.

Jos yhtälöryhmällä on tarkka ratkaisu $\underline{x}$, niin

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

eli[6]

$$\|\underline{b} - A\underline{x}\| = 0.$$

Yleensä tarkkaa ratkaisua ei ole, vaan etsitään ns. **pienimmän nelisumman** ratkaisu, joka on se vektori $\underline{x}$, jolla lauseke

$$\|\underline{b} - A\underline{x}\|$$

minimoituu.

MATLABin komennolla

$$\underline{x} = A \backslash \underline{b}$$

muodostetaan yhtälöryhmän **pienimmän neliösumman ratkaisu.**

Ylimääräytyneitä yhtälöryhmiä syntyy mm. kun sovitetaan matemaattista mallia mittausdataan. Tätä kuvaavat seuraavat esimerkit.

Esim. Pienimmän neliösumman suora.

On mitattu muuttujien x ja y arvoja. Mittaukset muodostuvat seuraavista havaintopareista

x	65,1	47,3	211,2	153,5	23,8	22,6	16,1	219	271,6	17,9	48,1
y	73	125	512	452	39	20	93	278	532	47	170

Havaintopareihin on sovitettava suora

$$y = ax + b$$

pienimmän neliösumman menetelmällä.

Muodostetaan mittausdatan sisältävät pystyvektorit:

```
>> x = [65.1 47.3 211.2 153.5 23.8 22.6 16.1 219 271.6 17.9 48.1]'
>> y = [73 125 512 452 39 20 93 278 532 47 170]'.
```

[6] Merkintä $\|\underline{x}\|$ tarkoittaa vektorin $\underline{x}$ euklidista normia, joka n-vektorille on $\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$. Vektoreiden tai pisteiden $\underline{x}$ ja $\underline{y}$ välinen etäisyys on $\|\underline{x} - \underline{y}\|$.

Merkitsemällä $\underline{1}$:llä vektoria, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä, voidaan datavektorin $\underline{y}$ riippuvuutta datavektorista $\underline{x}$ kuvata yhtälöllä

$$\underline{y} \approx a\underline{x} + b\underline{1} = b\underline{1} + a\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}.$$

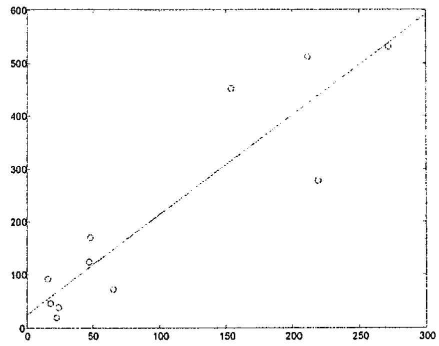
Tehtävän ratkaisu on yhtälöryhmän

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \underline{y}$$

pienimmän neliösumman ratkaisu b, a.

Muodostetaan yhtälöryhmän kerroinmatriisi:

```
>> A = [ones(size(x)) x]
A =
        1.0000    65.1000
        1.0000    47.3000
        1.0000   211.2000
        1.0000   153.5000
        1.0000    23.8000
        1.0000    22.6000
        1.0000    16.1000
        1.0000   219.0000
        1.0000   271.6000
        1.0000    17.9000
        1.0000    48.1000
```



ja määrätään pienimmän neliösumman ratkaisu:

```
>> c = A\y
c =
      24.4924
       1.8898
```

Siis

$$a = 1{,}8898$$
$$b = 24{,}4924$$

eli pienimmän neliösumman suora on

$$y = 1{,}8898x + 24{,}4924$$

Piirretään kuva tilanteesta. Piirretään suoran kuvaaja välillä [0, 300]. Lasketaan suoran x-arvot pystyvektoriin X ja y-arvot pystyvektoriin Y. Huomaa, kuinka suoran arvot lasketaan!

```
>> X = linspace(0,300)';
>> Y = [ones(size(X)), X]*c;
```

Piirretään suora ja datapisteet samaan kuvaan

```
>> plot(X,Y,'-',x,y,'o')
```

Esim. Kahden muuttujan lineaarinen regressio.

Tarkastellaan tilannetta, jossa muuttuja y riippuu kahdesta eri muuttujasta x_1 ja x_2 mallin

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

mukaisesti. On määrättävä kertoimet a_0, a_1, a_2. Tätä varten on suoritettu mittauksia, jotka on koottu seuraavaan taulukkoon.

x_1	0,1	0,3	0,6	0,8	1,0	1,2
x_2	0,2	0,4	0,5	0,9	1,2	1,5
y	2,2	2,3	2,9	2,6	2,5	2,4

Sovitetaan malli mittauksiin pienimmän neliösumman menetelmällä.

Muodostetaan mittausdatan sisältävät pystyvektorit:

```
>> x1 = [0.1 0.3 0.6 0.8 1 1.2]';
>> x2 = [0.2 0.4 0.5 0.9 1.2 1.5]';
>> y = [2.2 2.3 2.9 2.6 2.5 2.4]';
```

Datavektorin $\underline{y}$ riippuvuutta datavektoreista $\underline{x}_1$ ja $\underline{x}_2$ voidaan kuvata yhtälöllä

$$\underline{y} \approx a_0\underline{1} + a_1\underline{x}_1 + a_2\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{x}_1 & \underline{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},$$

missä $\underline{1}$ on vektori, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä.

Tehtävän ratkaisu on yhtälöryhmän

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{x}_1 & \underline{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \underline{y}$$

pienimmän neliösumman ratkaisu a_0, a_1, a_2.

Muodostetaan yhtälöryhmän kerroinmatriisi:

```
>> X = [ones(size(x1)), x1 x2]
X =
    1.0000    0.1000    0.2000
    1.0000    0.3000    0.4000
    1.0000    0.6000    0.5000
    1.0000    0.8000    0.9000
    1.0000    1.0000    1.2000
    1.0000    1.2000    1.5000
```

ja määrätään pienimmän neliösumman ratkaisu

```
>> a = X\y
a =
    2.3477
    2.6784
   -2.1063
```

Siis malli on (pyöristetään kertoimet kahteen desimaaliin)

$$y = 2{,}35 + 2{,}68x_1 - 2{,}11x_2$$

Tarkistetaan vielä mallin hyvyys määrittämällä mallista laskettujen arvojen ja mittausarvojen erotuksen itseisarvon maksimi.

Määritetään mallista lasketut x_1 ja x_2 vastaavat arvot:

```
>> Y = X*a
Y =
    2.1943
    2.3087
    2.9016
    2.5947
    2.4985
```

```
      2.4023
```

Lasketaan näiden arvojen ja mittausarvojen erotuksen itseisarvon maksimi:

```
>> max(abs(Y-y))
ans =
      0.0087
```

Koska tämä on pieni[7], kuvaa malli hyvin tilannetta.

TEHTÄVIÄ

1. On mitattu muuttujien t ja y arvoja. Mittaukset muodostuvat seuraavista havaintopareista:

t	0	0,3	0,8	1,1	1,6	2,3
y	0,82	0,72	0,63	0,60	0,55	0,50

Muuttujien t ja y riippuvuutta kuvaa funktio

$$y = c_1 + c_2 e^{-t}.$$

Määritä kertoimet c_1 ja c_2 pienimmän neliösumman menetelmällä. Piirrä kuva tilanteesta.

2. On mitattu muuttujien t ja y arvoja. Mittaukset muodostuvat seuraavista havaintopareista:

t	0	0,3	0,8	1,2	1,7	2,3
y	0,5	0,83	1,18	1,32	1,36	1,42

Muuttujien t ja y riippuvuutta kuvaa funktio

$$y = a_1 + a_2 t + a_3 t^2.$$

Määritä kertoimet a_1, a_2, a_3 pienimmän neliösumman menetelmällä. Piirrä kuva tilanteesta.

[7] Pienuus on aina suhteellista ...