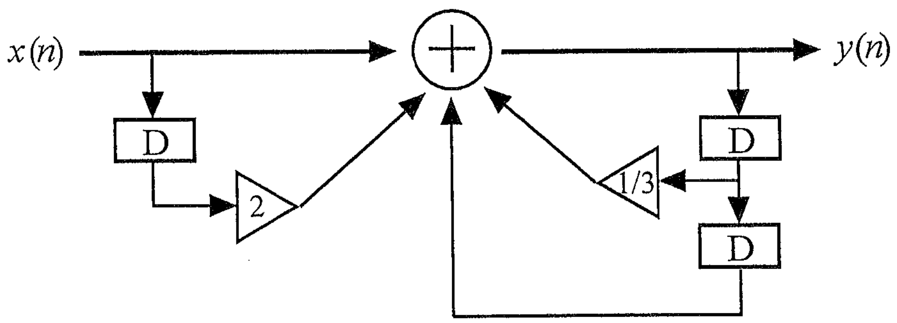
INTEGRAALIMUUNNOKSET

Timo Mäkelä



$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + y(n-2) + \frac{1}{3}y(n-1)$$

SISÄLTÖ:

0. PERUSTEITA

Tässä luvussa kerrataan joitain matematiikan tuloksia, jotka integraalimuunnoksia käsiteltäessä on syytä tuntea. Seuraavassa on esitetty, missä aihepiireissä kunkin kappaleen tietoja tarvitaan.

0.1 Funktion ominaisuuksia: kaikkialla

0.2 Integraalilaskentaa: Laplace-muunnos, Fourier-muunnos

0.3 Kompleksiluvut: kaikkialla

0.4 Algebraa: Laplace-muunnos

0.5 Cramerin sääntö: Laplace-muunnos

0.6 Sarjateoriaa: z-muunnos, Fourier-sarjat

0.7 Jaksollinen funktio: Fourier-sarjat

0.1 Funktion ominaisuuksia

Tarkastellaan aluksi reaaliakselilla tai sen osavälillä määriteltyä funktiota $f(x)$. Funktio $f(x)$ on **jatkuva**, jos muuttujan x pieni muutos aiheuttaa pienen muutoksen funktion arvoon. Tällöin kaikissa funktion määrittelyalueen pisteissä x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

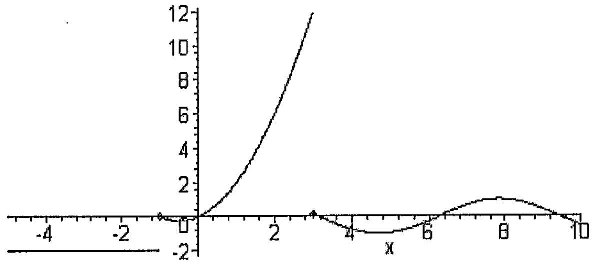
Jatkuvan funktion kuvaaja on jokaisella määrittelyalueensa välillä yhtenäinen katkeamaton käyrä. Tekniikassa esiintyy kuitenkin paljon sellaisia funktioita, joiden kuvaajissa on hyppäyksiä. Yksinkertaisin tällaisten funktioiden luokka on **paloittain jatkuvat** funktiot. Tällaisella funktiolla on jokaisella suljetulla välillä korkeintaan äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia ja näissä epäjatkuvuuskohdissa funktioilla on *äärelliset vasemman- ja oikeanpuoleiset raja-arvot.*

ESIMERKKEJÄ

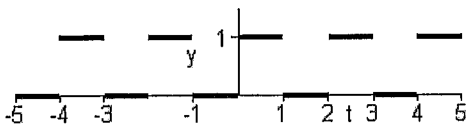
1. Funktio

$$f(t) = \begin{cases} -2, & \text{kun } t < -1 \\ t^2 + t, & \text{kun } -1 \le t < 3 \\ \sin t, & \text{kun } t \ge 3 \end{cases}$$

on paloittain jatkuva.



2. Kuvan pulssijono on paloittain jatkuva funktio.



Jos funktion määrittelyjoukko on kokonaisluvut tai sen osaväli, sanotaan funktiota **lukujonoksi.** Funktion f määrittelemää lukujonoa merkitään $f(n)$ tai f_n.

ESIMERKKEJÄ

3. Lukujonon $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \cdots$ määrittelee funktio

$$f(n) = \frac{1}{n^2},$$

kun $n = 1, 2, 3, \ldots$.

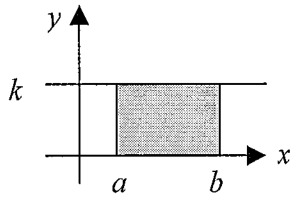
Funktio tai lukujono $f(x)$ on **rajoitettu**, jos on olemassa positiivinen luku M siten, että

$$|f(x)| \leq M$$

kaikilla muuttujan arvoilla x.

Funktio $f(x)$ on korkeintaan **kertalukua** $e^{\alpha x}$, jos funktio $\dfrac{f(x)}{e^{\alpha x}}$ on rajoitettu.

0.2 Integraaliaskentaa



Palautetaan ensiksi mieleen **vakiofunktion integraali**:

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a).$$

Jos k on positiivinen, on integraalin arvo kuvan suorakulmion pinta-ala.

Tarkastellaan seuraavaksi **epäoleellista integraalia**, jossa yläraja on ääretön: $\int_a^\infty f(x)dx$.

Oletetaan, että funktio f on integroituva jokaisella välillä $[a, M]$, missä luku $M > a$ voi olla kuinka suuri luku tahansa. Jos on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx,$$

niin sanotaan, että integraali

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

suppenee ja

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx}$$

ESIMERKKEJÄ

1. Tutkitaan integraalin $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ suppenemista.

   Koska

   $$\int_1^M \frac{1}{x^2}dx = \Big|_1^M -\frac{1}{x} = -\frac{1}{M} + 1$$

   on

   $$\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{1}{x^2}dx = \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M} + 1\right) = 1,$$

   joten integraali suppenee ja

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$$

Tarkastellaan lopuksi **osittaisintegrointia**.

Jos funktiot f ja g ovat derivoituvia niin tulon derivoimissäännön mukaan

$$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Siten integraalifunktion määritelmän perusteella

$$\int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = f(x)g(x) + C.$$

Ottamalla integraali erikseen yhteenlaskettavista, voidaan kirjoittaa

$$\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + C,$$

josta saadaan[1] **osittaisintegroinnin kaava**:

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$$

Tätä tulosta käyttäen voidaan muotoa $f'(x)g(x)$ olevan funktion integrointi muuntaa muotoa $f(x)g'(x)$ olevan funktion integroinniksi. Jälkimmäinen integraali voi olla helpompi laskea.

Määrätylle integraalille osittaisintegroinnin kaava on seuraava:

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x)dx = \Big|_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)dx}$$

ESIMERKKEJÄ

2. Lasketaan integraali $\int x \sin x dx$.

Valitaan $\begin{cases} f'(x) = \sin x \\ g(x) = x \end{cases}$, jolloin $\begin{cases} f(x) = -\cos x \\ g'(x) = 1 \end{cases}$. Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C$$

3. Lasketaan integraali $\int_0^1 xe^x dx$.

Valitaan $\begin{cases} f'(x) = e^x \\ g(x) = x \end{cases}$, jolloin $\begin{cases} f(x) = e^x \\ g'(x) = 1 \end{cases}$. Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_0^1 xe^x dx = \Big|_0^1 xe^x - \int_0^1 e^x dx = e - \Big|_0^1 e^x = e - (e-1) = 1$$

0.3 Kompleksiluvut

Kompleksiluku on muotoa

$$x + yi$$

[1] Integrointivakio C voidaan sisällyttää oikean puolen integraaliin.

oleva luku, missä x ja y ovat reaalilukuja ja i on **imaginaariyksikkö**. Imaginaariyksikölle i pätee

$$i^2 = -1.$$

Imaginaariyksikköä voidaan merkitä myös kirjaimella j.

Kompleksiluvun $z = x + yi$

- **reaaliosa** $\mathrm{Re}(z) = x$
- **imaginaariosa** $\mathrm{Im}(z) = y$
- **liittoluku** $\bar{z} = x - yi$
- **itseisarvo** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Suoraan laskemalla todetaan

$$z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

Eulerin[2] kaavan mukaan

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x,}$$

missä muuttuja x on reaaliluku. Eulerin kaava johdetaan kappaleessa 0.6

Käyttämällä hyväksi sinin parittomuutta ja kosinin parillisuutta saadaan

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x.$$

Suoralla laskulla todetaan, että sini ja kosini voidaan lausua eksponenttifunktion avulla:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \\ \sin x &= -\frac{i}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \end{aligned}}$$

Jos kompleksiluvun z *itseisarvo* on r ja *vaihekulma* on φ, niin kompleksiluku voidaan esittää muodossa

$$z = re^{\varphi i} = r\cos\varphi + ir\sin\varphi.$$

Kompleksiluvun z määräävät siis täysin sen *itseisarvo* on r ja *vaihekulma* on φ. Teknisessä laskennassa kompleksiluvuille käytetäänkin usein **osoitinesitystä**

$$\boxed{z = r\angle\varphi.}$$

Hyperbelifunktiot määritellään seuraavasti:

$$\boxed{\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \\ \sinh x &= \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \end{aligned}}$$

---

[2] **Leonhard Euler** (1707-1783) oli sveitsiläinen matemaatikko, joka työskenteli Pietarissa ja Berliinissä. Euler oli yksi kaikkien aikojen tuotteliaimpia matemaatikkoja. Hän tutki mm. differentiaalilaskentaa, lukuteoriaa ja nesteiden virtauksia. Hän keksi hitausmomentin ja vapaan pyörimisakselin käsitteet ja kehitti vektorilaskentaa.

Vertaamalla näitä aikaisempiin kaavoihin huomataan, että kompleksilukujen kautta hyperbelifunktiot ovat yhteydessä trigonometrisiin funktioihin:

$$\cos x = \cosh ix$$
$$\sin x = -i \sinh ix$$

ESIMERKKEJÄ

1. Kompleksiluvun $z = 2+3i$ reaaliosa $\mathrm{Re}(z) = 2$, imaginaariosa $\mathrm{Im}(z) = 3$, liittoluku $\bar{z} = 2-3i$ ja itseisarvo $|z| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.
2. Kompleksiluku

$$2e^{\frac{\pi}{6}i} = 2\cos\frac{\pi}{6} + 2\sin\frac{\pi}{6}i = \sqrt{3}+i$$

$$3{,}5\angle 52° = 3{,}5\cos(52°) + 3{,}5\sin(52°)i = 2{,}15482 + 2{,}75804i$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 0:

1. Johda sinin ja kosinin eksponenttifunktion avulla lausutut esitykset.

0.4 Algebraa

Muotoa

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

olevaa lauseketta sanotaan **muuttujan x polynomiksi**. Lukuja $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sanotaan **polynomin kertoimiksi**. Polynomia, jonka kaikki kertoimet ovat nollia sanotaan **nollapolynomiksi**. Polynomin kertoimet voivat olla reaali- tai imaginaarilukuja. Seuraavassa rajoitutaan vain *reaalikertoimisiin* polynomeihin.

Polynomin

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

sanotaan olevan **astetta** n, jos kerroin $a_n \neq 0$. Siis polynomin aste on polynomin *korkeimman potenssin eksponentti*. Nollapolynomin astetta ei ole määritelty.

ESIMERKKEJÄ

1. Polynomin $5x^4 - 9x^3 + x^2 - 10x + 7$ aste on 4.

Polynomin $P(x)$ **nollakohdalla** tarkoitetaan lukua c, jolle $P(c) = 0$. Sanotaan myös, että c on yhtälön $P(x) = 0$ **juuri.**

Algebran peruslauseen mukaan *jokainen polynomi voidaan kompleksilukujen joukossa jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin*:

Astetta n olevalla polynomilla $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a_0$ on täsmälleen n reaalista tai imaginaarista nollakohtaa[3]. Jos nollakohdat ovat $x_1, x_2, \ldots, x_n$, niin

$$P(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n). \qquad (*)$$

Edellä esitetyssä tulossa voi sama tekijä esiintyä useampaan kertaan. Nollakohdan x_0 **kertaluku** on termin $x-x_0$ esiintymiskertojen lukumäärä yo. tulossa.

Polynomi voidaan siis jakaa tekijöihin, jos sen nollakohdat tunnetaan. Jos polynomin asteluku on pienempi kuin viisi, niin polynomin nollakohdat voidaan määrittää *ratkaisukaavalla*. Käytännössä kuitenkin kolmannen ja neljännen asteen polynomien nollakohtien ratkaisukaavat ovat liian monimutkaisia. Viidennen ja sitä korkeamman asteen polynomien nollakohdilla ei ratkaisukaavaa olekaan! Yleisesti turvaudutaan *numeerisiin menetelmiin*. Tällöin kuitenkaan esitys (*) ei aina ole tarkasti voimassa.

Polynomin **alkutekijäksi** sanotaan sellaista tekijää, jota ei voida jakaa enää tekijöihin. *Jos rajoitutaan reaalilukuihin niin polynomin alkutekijät ovat reaalisia ensimmäisen tai toisen asteen polynomeja.* Toisen asteen reaalisesti jaoton alkutekijä on sellainen, jonka *nollakohdat ovat imaginaarisia.*

ESIMERKKEJÄ

2. Polynomin $2x^3+2x^2-20x+16$ nollakohdat ovat –4, 1, 2. Siten polynomi voidaan jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$2x^3+2x^2-20x+16=2(x+4)(x-1)(x-2).$$

3. Polynomin $3x^3+3x^2-48x+60$ nollakohdat ovat –5, 2, 2. Siten polynomi voidaan jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$3x^3+3x^2-48x+60=3(x+5)(x-2)^2.$$

4. Polynomin x^2+4x+5 nollakohdat ovat $-2\pm i$. Nämä eivät ole reaalisia, joten polynomi on *reaalisesti jaoton*. Kompleksilukujen joukossa polynomi voidaan sen sijaan jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$x^2+4x+5=(x+2+i)(x+2-i).$$

5. Polynomin $x^4-6x^3-7x^2+2x+1$ nollakohdat ovat –1,12168; –0,286559; 0,446916; 6,96132. Nämä luvut ovat nollakohtien likiarvoja, joten esityksen (*) yhtälö ei päde tarkasti, vaan

$$\begin{aligned}&(x+1{,}12168)(x+0{,}286559)(x-0{,}446916)(x-6{,}96132)\\ &\approx x^4-5{,}999997x-7{,}000014x^2+1{,}999997x+1{,}000001\end{aligned}$$

Huomautus: Jos imaginaariluku z on reaalikertoimisen polynomin $P(x)$ nollakohta, niin myös sen liittoluku $\bar{z}$ on nollakohta. Siten 1. asteen polynomit $x-z$ ja $x-\bar{z}$ ovat polynomin $P(x)$ tekijöinä kompleksilukujen joukossa. Niiden tulo

$$(x-z)(x-\bar{z})=x^2-(z+\bar{z})x+|z|^2=x^2-2\,\mathrm{Re}(z)x+|z|^2$$

[3] Nollakohtien ei tarvitse olla eri lukuja.

on polynomin $P(x)$ jaoton 2. asteen tekijä reaalilukujen joukossa (vrt. esim. 4).

Jokainen toisen asteen polynomi voidaan **täydentää neliöksi**. Polynomin x^2+ax+b neliöksi täydentämisellä tarkoitetaan seuraavaa *binomin neliön kaavaan*

$$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

perustuvaa toimenpidettä:

$$x^2+ax+b = x^2+2\frac{a}{2}x+\left(\frac{a}{2}\right)^2+b-\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}.$$

ESIMERKKEJÄ

6. $x^2+3x+5 = x^2+2\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2+5-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+5-\frac{9}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

7. $x^2-5x+1 = x^2-2\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2+1-\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2+1-\frac{25}{4} = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$

Rationaalifunktio on kahden polynomin osamäärää

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

missä $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomeja. Supistamalla tarvittaessa yhteiset tekijät, voidaan olettaa, että polynomeilla $P(x)$ ja $Q(x)$ *ei ole yhteisiä tekijöitä*. Tällöin rationaalifunktion $R(x)$

- **nollat** ovat osoittajan $P(x)$ nollakohdat
- **navat** ovat nimittäjän $Q(x)$ nollakohdat

Rationaalifunktion raja-arvo

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$$

täsmälleen silloin, kun *osoittajan $P(x)$ aste on pienempi kuin nimittäjän $Q(x)$ aste.*

ESIMERKKEJÄ

8. Rationaalifunktion

$$R(x) = \frac{x^2+1}{x^3+3x^2+2x}$$

nollat ovat $x=\pm i$, sillä

$$x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\pm i$$

navat ovat $x=0$, $x=-1$ ja $x=-2$, sillä

$$x^3+3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ tai } x=-1 \text{ tai } x=-2.$$

Koska osoittajan aste 2 on pienempi kuin nimittäjän aste 3, on

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3+3x^2+2x} \overset{(x^3}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = 0$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 0:

2. Jaa reaalisiin alkutekijöihin seuraavat polynomit:

   a) x^2-9 b) $2x^2+2x-12$

   c) $7x^3+56x^2+119x+70$ d $x^3+8{,}5x^2+23x+22{,}5$

3. Täydennä neliöksi seuraavat polynomit:

   a) x^2+6x-7 b) x^2-3x+5

   c) $3x^2+3x+6$

0.5 Cramerin sääntö

Kun Laplace-muunnostekniikalla ratkaistaan differentiaaliyhtälöryhmiä, joudutaan usein ratkaisemaan lineaarisia yhtälöpareja. Näiden ratkaiseminen käy kätevästi **Cramerin[4] säännöllä**:

Jos yhtälöparin

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

kerroindeterminantti

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

niin ratkaisu on

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D}.$$

Ratkaisun *osoittajat on saatu kerroindeterminantista vaihtamalla tuntemattoman kertoimien tilalle oikean puolen vakiot.*

Cramerin sääntö on yleistettävissä useamman tuntemattoman tapaukseen. Kuitenkin ratkaistaessa yhtälöryhmiä, joissa on vähintään kolme tuntematonta, tavanomainen Gaussin menetelmä on nopeampi tapa.

ESIMERKKEJÄ

1. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

---

[4] **Gabriel Cramer** (1704-1752) oli sveitsiläinen matemaatikko.

Koska kerroindeterminantti $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, on

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{27}{7}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{7} = -\frac{8}{7}$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 0:

4. Ratkaise Cramerin säännöllä yhtälöparit

a) $\begin{cases} 3x + 2y = -2 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -2x + 3y = -2 \\ 7x + y = 5 \end{cases}$

0.6 Sarjateoriaa

Äärettömän lukujonon $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ termeistä muodostettua ääretöntä summalauseketta

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

sanotaan **sarjaksi**.

Lukujonon

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\ldots$$

termejä kutsutaan sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **osasummiksi**. Erityisesti sarjan **n:s osasumma** on

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Sarjoja käsiteltäessä keskeinen kysymys on sarjan *summan määrittäminen*. Sarjan summa määritellään osasummien avulla:

Jos n:n kasvaessa rajatta sarjan n:s osasumma S_n

- lähestyy kohden *äärellistä raja-arvoa* S, sanotaan, että sarja **suppenee** ja sen summa on S. Tällöin merkitään

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

- ei lähesty kohden mitään äärellistä raja-arvoa, sanotaan, että sarja **hajaantuu**. Hajaantuvalla sarjalla ei ole summaa.

Jos äärettömän monen termin summa on äärellinen, on melkein kaikkien termien oltava lähellä nollaa. Tämän idean esittää täsmällisesti seuraava tulos:

Suppenevan sarjan termit lähestyvät nollaa: sarja $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ suppenee $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

ESIMERKKEJÄ

1. **Geometrinen sarja.**

   Sarja on geometrinen, jos sen *kahden peräkkäisen termin osamäärä on aina sama*. Jos sarjan **ensimmäistä termiä** merkitään a:lla ja kahden peräkkäisen termin[5] **suhdelukua** q:lla, niin geometrinen sarja voidaan esittää muodossa

   $$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots.$$

   Sarjan n:s osasumma on ($q \neq 1$)

   $$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

   Jos $|q| < 1$, niin $q^n \to 0$, kun $n \to \infty$. Siis tällöin sarja suppenee ja sen summa on

   $$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

   Yleisesti voidaan todeta:

   Geometrinen sarja

   $$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$$

   suppenee, jos ja vain jos $|q| < 1$ ja tällöin sen summa on

   $$S = \frac{a}{1-q}$$

2. Tutkitaan sarjan $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots$ suppenemista.

   <u>Ratkaisu:</u> Sarja on geometrinen sarja, jonka suhdeluku $q = \frac{1}{2}$, $|q| < 1$ ja ensimmäinen termi $a = 3$. Siten sarja suppenee ja sen summa on

   $$S = \frac{a}{1-q} = \frac{3}{1-\frac{1}{2}} = 6.$$

Sarjan termit voivat riippua muuttujasta, kuten **potenssisarjan** tapauksessa

[5] Jälkimmäinen÷edellinen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots,$$

missä

- lukuja a_k sanotaan **potenssisarjan kertoimiksi**
- luku x_0 on potenssisarjan **kehityskeskus**.
- **muuttuja** on x.

Potenssisarjoissa keskeisiä kysymyksiä ovat

- **suppenemisalue**: millä muuttujan x arvoilla sarja suppenee?
- potenssisarjan summa.

Potenssisarja suppenee aina, kun $x = x_0$, sillä tällöin on kyseessä sarja $a_0 + 0 + 0 + \ldots$ Voidaan osoittaa, että jokaisella potenssisarjalla on sellainen luku[6] $R \geq 0$, että sarja

- suppenee arvoilla x, joilla $|x - x_0| < R$.
- hajaantuu arvoilla x, joilla $|x - x_0| > R$.

Lukua R sanotaan potenssisarjan **suppenemissäteeksi**. Sarjan suppenemisesta arvoilla x, joilla $|x - x_0| = R$ ei voida sanoa mitään yleistä.

Monella tutulla funktiolla on potenssisarjakehitelmä. Näitä sanotaan myös funktion **Taylorin[7] sarjoiksi**. Esimerkiksi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Nämä sarjat suppenevat kaikilla x. Näiden sarjojen termit ovat hyvin samanlaisia. Tämä ei ole sattumaa, sillä sijoittamalla eksponenttifunktion sarjakehitelmässä muuttujan x paikalle $i\varphi$ saadaan

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + i^2\frac{\varphi^2}{2!} + i^3\frac{\varphi^3}{3!} + i^4\frac{\varphi^4}{4!} + i^5\frac{\varphi^5}{5!} + i^6\frac{\varphi^6}{6!} + i^7\frac{\varphi^7}{7!} + \cdots$$

Koska i:n potenssit ovat vuoron perään $1, i, -1, -i$, voidaan tämä kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i\frac{\varphi^7}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

josta sinin ja kosinin sarjakehitelmiä käyttäen saadaan **Eulerin kaava**

[6] Jos $R = 0$, sarja suppenee vain arvolla $x = x_0$. Jos $R = \infty$, sarja suppenee kaikilla x.

[7] **Brook Taylor** (1685-1731) oli englantilainen matemaatikko, joka esitti nimeään kantavan kaavan v. 1715.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

Potenssisarjassa funktio on lausuttu potenssifunktioiden

$$1,\ x - x_0,\ (x-x_0)^2,\ (x-x_0)^3, \ldots$$

avulla. Nämä funktiot muodostavat niin täydellisen funktiojoukon ns. **kantafunktiot**, että niiden avulla monet muut funktiot voidaan esittää äärettöminä sarjoina.

HARJOITUSTEHTÄVÄT 0:

5. Osoita, että suppenevan sarjan termit lähestyvät nollaa.
6. Johda geometrisen sarjan n:nnen osasumman kaava.
7. Määritä potenssisarjan

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

summa. Millä x:n arvoilla sarja suppenee?

0.7 Jaksollinen funktio

Funktio f on **jaksollinen**, jos on olemassa vakio $P \neq 0$ siten, että

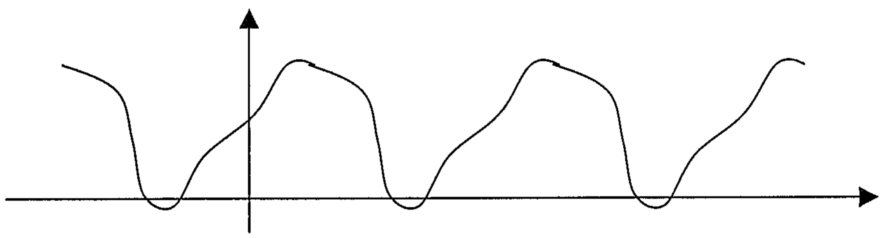
$$f(x+P) = f(x)$$

kaikilla f:n määrittelyjoukon arvoilla x. Lukua P sanotaan funktion f **jaksoksi.**

Jos P on funktion f jakso, niin myös kaikki P:n monikerrat ovat jaksoja:

$$f(x+kP) = f(x)$$

kaikilla x, kun k on kokonaisluku. Jaksollisen funktion *pienintä positiivista jaksoa* sanotaan **perusjaksoksi.**



ESIMERKKEJÄ

1. Sini ja kosini ovat jaksollisia funktioita, joiden perusjakso on 2π.
2. Tutki funktion

$$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$$

jaksollisuutta ja määritä perusjakso. Kerroin $\omega > 0$.

Ratkaisu: Mikäli f:llä on jakso P, niin kaikilla t:n arvoilla

$$f(t+P)=f(t)$$
$$\Leftrightarrow \sin[\omega(t+P)+\varphi]=\sin(\omega t+\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \sin[(\omega t+\varphi)+\omega P]=\sin(\omega t+\varphi)$$

Sinin jaksollisuuden perusteella edellinen yhtälö toteutuu, jos

$$\omega P=2\pi$$
$$\Leftrightarrow P=\frac{2\pi}{\omega}$$

Siis funktio f on jaksollinen ja sen eräs jakso on $\frac{2\pi}{\omega}$. Koska 2π on sinin perusjakso, on $P=\frac{2\pi}{\omega}$ on f:n pienin positiivinen jakso eli perusjakso.

Vastaus: Funktio f on jaksollinen ja sen perusjakso on $P=\frac{2\pi}{\omega}$.

Otetaan käyttöön seuraavat nimitykset: jaksoa P vastaava

- **taajuus** on $\frac{1}{P}$
- **kulmataajuus** on $\omega=\frac{2\pi}{P}$.

Näille pätee

$$\omega P=2\pi$$

Kulmataajuutta kutsutaan joskus lyhyesti taajuudeksi.

Jos funktion f jakso on P ja f on välillä $[0,P]$ integroituva, niin voidaan osoittaa, että

$$\boxed{\int_a^{a+P} f(x)dx=\int_0^P f(x)dx}$$

kaikilla luvuilla a. Siis, *kun integroidaan yli jaksovälin on integraalin arvo aina sama.*

HARJOITUSTEHTÄVÄT 0:

8. Oletetaan, että f on jaksollinen ja a on sen jakso. Päättele, että myös

   a) $2a$ b) $-3a$ c) $na,\ n\in\mathbb{Z}$

   ovat f:n jaksoja.

9. Olkoon integroituvan funktion f jakso P. Osoita, että

$$\int_a^{a+P} f(x)dx=\int_0^P f(x)dx$$

   kaikilla luvuilla a.

1. LAPLACE-MUUNNOS

1.1 Peruskäsitteet

Olkoon $f(t)$ reaalimuuttujan t funktio, joka määritelty, kun $t \geq 0$. Funktion $f(t)$ **Laplace[8]-muunnoksella** tarkoitetaan *kompleksimuuttujan s* kompleksiarvoista funktiota

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Laplace-muunnosta sanotaan myös **L-muunnokseksi** tai **s-muunnokseksi**.

Kaikilla funktioilla ei ole Laplace-muunnosta. Funktiolla $f(t)$ on Laplace-muunnos, jos määritelmän epäoleellinen integraali suppenee joillain kompleksimuuttujan s arvoilla. Tällöin sanotaan, että f on **Laplace-muuntuva**. Melkein kaikki sovelluksissa esiintyvät funktiot ovat Laplace-muuntuvia, sillä seuraava tulos pätee[9]:

Jos funktio $f(t)$

- on paloittain jatkuva ja
- korkeintaan kertalukua $e^{\alpha t}$,

niin funktiolla $f(t)$ on Laplace-muunnos $F(s)$, kun $\mathrm{Re}\, s > \alpha$.

Seuraavassa oletetaan, että yo. ehdot ovat voimassa.

Funktion $f(t)$ L-muunnosta merkitään $L[f(t)]$. Laplace-muunnoksen merkitsemiseen käytetään myös seuraavaa tapaa: muunnettavaa funktiota merkitään *pienellä kirjaimella* ja sen L-muunnosta vastaavalla *isolla kirjaimella*.

Jos

$$F(s) = L[f(t)],$$

niin merkitään

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

ja sanotaan, että $f(t)$ on funktion $F(s)$ **Laplace-käänteismuunnos.**

Funktiot $f(t)$ ja sen Laplace-muunnos $F(s)$ muodostavat **Laplace-muunnosparin**, jolle käytetään merkintää

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \quad \text{tai} \quad F(s) \leftrightarrow f(t)$$

Huomautus: Laplace-muunnos on kompleksimuuttujan s funktio. Yksinkertaisuuden vuoksi esimerkeissä rajoitetaan muuttuja s reaaliseksi. Tulokset esitetään kuitenkin kompleksimuuttujille. Esim. $\mathrm{Re}\, s > a$ tarkoittaa reaalimuuttujalle $s > a$.

ESIMERKKEJÄ

1. Määrätään vakiofunktion 1 L-muunnos:

---

[8] **Pierre Simon de Laplace** (1749-1827) oli ranskalainen matemaatikko ja tähtitieteilijä, joka tutki mm. taivaanmekaniikkaa ja todennäköisyyslaskentaa.

[9] Tuloksessa esiintyvät käsitteet on esitelty kappaleessa 0.1.

$$L(1)=\int_0^\infty 1\cdot e^{-st}dt=\lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-st}dt=\lim_{M\to\infty}\Big|_0^M -\frac{1}{s}e^{-st}=\lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sM}+\frac{1}{s}\right)=\frac{1}{s},$$

kun $\operatorname{Re} s>0$. Siis

$$1\leftrightarrow\frac{1}{s}$$

2. Määrätään funktion $f(t)=e^{at}$ Laplace-muunnos.

$$L\left(e^{at}\right)=\int_0^\infty e^{at}\cdot e^{-st}dt=\lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{(a-s)t}dt=\lim_{M\to\infty}\Big|_0^M \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}$$

$$=\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{a-s}e^{(a-s)M}-\frac{1}{a-s}\right)=\frac{1}{s-a}$$

kun $\operatorname{Re} s>a$. Siis

$$e^{at}\leftrightarrow\frac{1}{s-a}$$

1.2 Ominaisuudet

Laplace-muunnoksia ei käytännössä määritetä määritelmään perustuen integroimalla, vaan seuraavilla tavoilla:

- Käytetään *muunnostaulukoita*, joista löytyy tiettyjen *perusfunktioiden Laplace-muunnokset*. Muiden funktioiden Laplace-muunnokset johdetaan näistä käyttäen *Laplace-muunnosten laskusääntöjä*.
- Käytetään *tietokoneohjelmia* tai *laskimia*. Tällöinkin on syytä tuntea Laplace-muunnosten perusominaisuudet.

Tässä kappaleessa esitetään yleisimmät laskusäännöt ja joidenkin perusfunktioiden Laplace-muunnokset. Lisäksi käsitellään Laplace-muunnosten raja-arvoja.

1.2.1 Laskusäännöt

Laskusääntöjen esittelyä varten tarvitaan joitain määrittelyjä:

- $u(t)$ tarkoittaa **yksikköaskelta**[10], joka määritellään seuraavasti: $u(t)=\begin{cases}0, \text{kun } t<0\\ 1, \text{kun } t\geq 0\end{cases}$.
- Merkintä $g(0+)$ tarkoittaa funktion $g(t)$ oikeanpuoleista raja-arvoa pisteessä 0:

  $$g(0+)=\lim_{t\to 0+}g(t).$$

  Jos $g(t)$ on (oikealta) *jatkuva 0:ssa*, on $g(0+)=g(0)$.

Seuraavaan taulukkoon on koottu Laplace-muunnosten laskusäännöt. Taulukossa kirjaimet a ja b ovat lukuja.

[10] Yksikköaskelta käsitellään enemmän kappaleessa 1.6.1.

No	*f*(*t*)	*F*(*s*)	Ehto	Nimitys
S1	$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$		Lineaarisuus
S2	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$a>0$	Skaalaus
S3	$\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)$	$F(as)$	$a>0$	Muunnoksen skaalaus
S4	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$		Muunnoksen siirto
S5	$u(t-t_0)f(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}F(s)$	$t_0 \ge 0$	Siirto oikealle
S6	$f'(t)$	$sF(s)-f(0+)$		Derivaatan muunnos
S7	$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0+)-f'(0+)$		2. derivaatan muunnos
S8	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{1}{s}F(s)$		Integraalin muunnos
S9	$-tf(t)$	$F'(s)$		Muunnoksen derivaatta
S10	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$		Muunnoksen n:s deriv.

Derivaatan muunnossäännöt S6 ja S7 yleistyvät seuraavaan muotoon:

$$\boxed{f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+)}$$

Todistetaan joitain näistä säännöistä:

<u>Sääntö 1:</u> Integraalin lineaarisuuden perusteella

$$af(t)+bg(t) \leftrightarrow \int_0^\infty (af(t)+bg(t))e^{-st}dt = a\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = aF(s)+bG(s)$$

<u>Sääntö 4:</u>

$$e^{at}f(t) \leftrightarrow \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s-a)$$

<u>Sääntö 6:</u> Osittaisintegrointia käyttäen saadaan

$$f'(t) \leftrightarrow \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \Big|_0^\infty f(t)e^{-st} + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$= \lim_{M\to\infty} f(M)e^{-sM} - \lim_{m\to 0+} f(m)e^{-sm} + sF(s)$$

Jos f' on Laplace-muuntuva, niin voidaan osoittaa, että

$$\lim_{M\to\infty} f(M)e^{-sM} = 0,$$

kun Re s on riittävän suuri. Koska

$$\lim_{m\to 0+} f(m)e^{-sm} = \lim_{m\to 0+} f(m) = f(0+),$$

saadaan tulos

$$f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0+)$$

Sääntö 7: Käytetään sääntöä S6 kahdesti:

$$f''(t) \leftrightarrow sL[f'(t)] - f'(0+) = s[sF(s) - f(0+)] - f'(0+) = s^2F(s) - sf(0+) - f'(0+)$$

Sääntö 8: Merkitään

$$g(t) = \int_0^t f(u)du.$$

Tällöin

$$g(0) = 0.$$

Jos $f(t)$ on paloittain jatkuva, on integraalin derivaattalauseen mukaan melkein kaikkialla[11]

$$g'(t) = f(t).$$

Derivaatan Laplace-muunnosta koskevan säännön S6 mukaan

$$F(s) = L[g'(t)] = sG(s) - g(0) = sG(s).$$

Siis

$$G(s) = \frac{F(s)}{s}$$

eli

$$L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(s)}{s}$$

1.2.2 Laskukaavat

Seuraavaan taulukkoon on koottu Laplace-muunnosten laskukaavoja. Taulukossa

- n on positiivinen kokonaisluku.
- $n!$ on **kertomafunktio**, jonka arvo on n:n ensimmäisen kokonaisluvun tulo[12]. Tarkemmin:
  - $0! = 1$
  - $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$, jos $n > 0$.

  Esimerkiksi $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
- a on mielivaltainen luku.

[11] Epäjatkuvuuspisteitä lukuunottamatta.

[12] $n!$ luetaan "n-kertoma".

No	$f(t)$	$F(s)$	
K1	1	$\frac{1}{s}$	
K2	t	$\frac{1}{s^2}$	
K3	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	Siis $t^{n-1} \leftrightarrow \frac{(n-1)!}{s^n}$
K4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	
K5	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	
K6	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$	Siis $t^{n-1}e^{at} \leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$
K7	$\frac{1}{a}\sin at$	$\frac{1}{s^2+a^2}$	Siis $\sin at \leftrightarrow \frac{a}{s^2+a^2}$
K8	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	
K9	$\frac{1}{a}\sinh at$	$\frac{1}{s^2-a^2}$	Siis $\sinh at \leftrightarrow \frac{a}{s^2-a^2}$
K10	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	

Taulukkoa voidaan lukea

- vasemmalta oikealle: määritetään Laplace-muunnos
- oikealta vasemmalle: määritetään Laplace-käänteismuunnos.

Taulukon kaavat on kirjoitettu muotoon, josta käänteismuunnos on helppo määrittää.

Johdetaan joitain taulukon kaavoista.

<u>Kaava 1:</u> Esimerkki 2 kappaleessa 1.1.

<u>Kaava 2:</u> Koska

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

on säännön S9 mukaan

$$-t = -t \cdot 1 \leftrightarrow \frac{d}{ds}\frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2}.$$

Tästä seuraa kaava 2.

<u>Kaava 3:</u> Tämä saadaan kaavan 2 tapaan kaavasta K1 sääntöä S10 käyttäen.

<u>Kaava 4:</u> Esimerkki 3 kappaleessa 1.1. Kaava voidaan johtaa myös sääntöä S4 käyttäen:

Koska

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{s}$$

on säännön S4 mukaan

$$e^{at} = e^{at} \cdot 1 \leftrightarrow \frac{1}{s-a}.$$

Kaava 7: Eulerin kaavan mukaan

$$\sin at = -\frac{i}{2}\left(e^{iat} - e^{-iat}\right).$$

Siten sääntöä S1 ja kaavaa K4 käyttäen

$$L[\sin at] = -\frac{i}{2}\left(L\left(e^{iat}\right) - L\left(e^{-iat}\right)\right) = -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = -\frac{i}{2}\frac{2ai}{s^2+a^2} = \frac{a}{s^2+a^2}.$$

Tästä seuraa kaava.

Kaava 8: Koska

$$\frac{d}{dt}\sin at = a\cos at,$$

on

$$\cos at = \frac{d}{dt}\frac{1}{a}\sin at$$

Käyttäen lineaarisuutta (sääntö S1), derivaatan muunnossääntöä S6 ja kaavaa K7 saadaan

$$L(\cos at) = L\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{a}\sin at\right) = \left(s\frac{1}{s^2+a^2} - \frac{1}{a}\sin 0\right) = \frac{s}{s^2+a^2}$$

ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään $L\left[\cos 3t + t + 6e^{-t}\right]$.

   Käyttäen lineaarisuutta (S1) sekä kaavoja K8, K2 ja K4 saadaan

$$L\left[\cos 3t + t + 6e^{-t}\right] = \frac{s}{s^2+3^2} + \frac{1}{s^2} + 6\frac{1}{s-(-1)} = \frac{s}{s^2+9} + \frac{1}{s^2} + \frac{6}{s+1}$$

2. Määritetään $L\left[t^4 e^{2t}\right]$.

   1. tapa: Suoraan kaavasta K6 saadaan

$$t^4 e^{2t} \leftrightarrow \frac{4!}{(s-2)^5} = \frac{24}{(s-2)^5}$$

   2.tapa: Kaavan K3 perusteella

$$t^4 \leftrightarrow \frac{4!}{s^5} = \frac{24}{s^5},$$

   josta sääntöä S4 käyttäen

$$e^{2t}t^4 \leftrightarrow \frac{24}{(s-2)^5}$$

3. Määritetään $L\left[(3\sin 6t - 4\cos 6t)e^{-2t}\right]$.

Merkitään

$$f(t) = 3\sin 6t - 4\cos 6t$$

Kaavojen K7 ja K8 perusteella Laplace-muunnos

$$F(s) = 3\frac{6}{s^2+6^2} - 4\frac{s}{s^2+6^2} = \frac{18}{s^2+36} - \frac{4s}{s^2+36}$$

Sääntöä S4 käyttäen saadaan

$$(3\sin 6t - 4\cos 6t)e^{-2t} = e^{-2t}f(t) \leftrightarrow F(s+2) = \frac{18}{(s+2)^2+36} - \frac{4(s+2)}{(s+2)^2+36}$$

$$= \frac{-4s+10}{s^2+4s+40}$$

1.2.3 Raja-arvoja

Tarkastellaan vielä Laplace-muunnosten raja-arvoja. Seuraavissa raja-arvoissa muuttuja s oletetaan *reaaliseksi*. Ilman todistusta esitetään:

Jos $F(s)$ on jonkun *funktion* Laplace-muunnos, niin

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

Tämän perusteella voidaan todistaa **alkuarvolause**:

Jos $f(t)$ ja $f'(t)$ ovat Laplace-muuntuvia, niin

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0+).$$

Todistus: Olkoon

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \text{ ja } f'(t) \leftrightarrow D(s)$$

Säännön S6 perusteella

$$D(s) = sF(s) - f(0+).$$

Siten edellä esitetyn tuloksen perusteella

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty}(f(0+) + D(s)) = f(0+) + \lim_{s\to\infty} D(s) = f(0+).$$

Lisäksi pätee **loppuarvolause**:

Jos $f(t)$ ja $f'(t)$ ovat Laplace-muuntuvia ja $\lim_{t\to\infty} f(t)$ on olemassa, niin

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

Kappaleessa 0.4 on todettu, että rationaalifunktion raja-arvo

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

vain jos *osoittajan* $P(s)$ *aste on pienempi kuin nimittäjän* $Q(s)$ *aste*. Siis vain tällöin voi rationaalifunktio olla jonkun funktion Laplace-muunnos. Myöhemmin osoitetaan, että jokainen tällainen rationaalifunktio on jonkun funktion Laplace-muunnos.

ESIMERKKEJÄ

1. Rationaalifunktion

$$\frac{2s^2+3s+1}{s^3+5s-7}$$

osoittajan aste on 2 ja nimittäjän aste on 3, joten rationaalifunktio on jonkun funktion $f(t)$ Laplace-muunnos. Alkuarvolauseen mukaan[13]

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} s\frac{2s^2+3s+1}{s^3+5s-7}=\lim_{s\to\infty}\frac{2+\frac{3}{s}+\frac{1}{s^2}}{1+\frac{5}{s^2}-\frac{7}{s^3}}=2.$$

2. Funktiot $f(t)=\sin t$ ja $f'(t)=\cos t$ ovat Laplace-muuntuvia ja kaavan K7 mukaan

$$F(s)=L[f(t)]=\frac{1}{s^2+1}.$$

Siten

$$\lim_{s\to 0} sF(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s^2+1}=0.$$

Tämä ei kuitenkaan ole

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}\sin t,$$

sillä raja-arvoa ei ole olemassa. Loppuarvolausetta ei siis voi tässä tapauksessa käyttää.

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1.2:

Määritä seuraavien muuttujan t funktioiden L-muunnokset:

1. a) $12+5t$ b) t^2+3t-4

   c) $\dfrac{5{,}4t^3-1{,}2t^5}{0{,}4}$

2. a) $t^3+\cos 5t$ b) t^5e^{4t}

   c) $2e^{-3t}+\sin 7t$

3. a) $e^{-t}\cos t$ b) $e^{2t}\cos 3t+\frac{1}{3}e^{2t}\sin 3t$

   c) $e^{-3t}\cos 7t+e^{t}\sin 2t$ d) $e^{3t}\cosh 4t$

4. a) $t\sin at$ b) $te^{at}\sin bt$

5. Käyttäen hyväksi kaavaa K4, johda funktioiden

   a) $f(t)=\cosh at$ b) $f(t)=\sinh at$

   Laplace-muunnokset (kaavat K9, K10).

[13] Voidaan osoittaa, että ehdot ovat voimassa.

1.3 Käänteismuunnos

1.3.1 Yleisiä ominaisuuksia

Tässä kappaleessa tarkastellaan funktion $F(s)$ Laplace-käänteismuunnoksen $f(t)=L^{-1}[F(s)]$ muodostamista.

Laplace-käänteismuunnoksia muodostettaessa käytetään Laplace-muunnoksen

- laskusääntöjä (kappale 1.2.1)
- laskukaavoja (kappale 1.2.2).

Laplace-käänteismuuntaminen on *lineaarinen operaatio* (a ja b ovat vakioita):

$$L^{-1}[aF(s)+bG(s)]=aL^{-1}[F(s)]+bL^{-1}[G(s)].$$

ESIMERKKEJÄ

1. Käyttäen Laplace-muunnoksen lineaarisuutta (S1) sekä sinin ja kosinin (K7, K8) Laplace-muunnoskaavoja saadaan:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}+\frac{5s}{s^2+4}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3^2}\right]+5L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]=\frac{1}{3}\sin 3t+5\cos 2t$$

Laplace-käänteismuunnoksen yleiseen olemassaoloon ei tässä puututa. Sen sijaan todetaan, että käänteismuunnos on *yksikäsitteinen*:

Jos paloittain jatkuvilla funktioilla $f(t)$ ja $g(t)$ on *sama Laplace-muunnos*, niin $f(t)$ ja $g(t)$ ovat *samoja funktioita*[14].

1.3.2 Rationaalifunktion käänteismuunnos

Laplace-muunnoksia käsiteltäessä joudutaan usein käänteismuuntamaan rationaalifunktio. Tarkastellaan vain tapausta, jossa *osoittajan aste on pienempi kuin nimittäjän aste*. Kappaleen 1.2.3 mukaan vain tällöin voi rationaalifunktio olla jonkun funktion Laplace-muunnos.

1.3.2.1 Perustapaukset

Käsitellään tiettyjen perustyyppien Laplace-käänteismuuntamista.

Tapaus 1: $R(s)=\dfrac{A}{(s-a)^n}$

Käänteismuuntaminen perustuu kaavaan K6

$$\frac{1}{(s-a)^n}\leftrightarrow\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at},$$

jonka erikoistapauksia ovat K4 ja K5:

$$\frac{1}{s-a}\leftrightarrow e^{at}$$

$$\frac{1}{(s-a)^2}\leftrightarrow te^{at}.$$

[14] Jokaisella suljetulla välillä mahdollisesti äärellisen montaa pistettä lukuun ottamatta funktioilla on samat arvot.

ESIMERKKEJÄ

1. $\dfrac{1}{s-2}+\dfrac{3}{(s-2)^3} \leftrightarrow e^{2t}+3\cdot\dfrac{1}{2!}t^2e^{2t}=\left(1+\dfrac{3}{2}t^2\right)e^{2t}$

Tapaus 2: $R(s)=\dfrac{As+B}{s^2+as+b}$, missä nimittäjä on reaalisesti jaoton 2. asteen polynomi.

Käänteismuuntaminen perustuu

- kaavoihin K7 ja K8:

$$\frac{1}{s^2+a^2} \leftrightarrow \frac{1}{a}\sin at, \quad \frac{s}{s^2+a^2} \leftrightarrow \cos at$$

- sääntöön S4:

$$F(s-a) \leftrightarrow e^{at}f(t)$$

- **neliöksi täydentämiseen,** joka on esitetty kappaleessa 0.4.

ESIMERKKEJÄ

2. Määritetään $L^{-1}\left[\dfrac{3}{2s^2+10}\right]$

<u>Ratkaisu:</u> Käyttäen kaavaa K7 saadaan

$$\frac{3}{2s^2+10}=\frac{3}{2}\frac{1}{s^2+5}=\frac{3}{2}\frac{1}{s^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} \leftrightarrow \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t$$

3. Määritetään $L^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-2)^2+9}\right]$

<u>Ratkaisu:</u> Käyttäen kaavaa K7 saadaan

$$F(s)=\frac{1}{s^2+9}=\frac{1}{s^2+3^2} \leftrightarrow \frac{1}{3}\sin 3t$$

Käyttäen sääntöä S4 saadaan

$$\frac{1}{(s-2)^2+9}=F(s-2) \leftrightarrow e^{2t}\frac{1}{3}\sin 3t=\frac{1}{3}e^{2t}\sin 3t$$

4. Määritetään $L^{-1}\left[\dfrac{s}{(s-2)^2+9}\right]$

<u>Ratkaisu:</u> Muokataan lauseketta seuraavasti:

$$\frac{s}{(s-2)^2+9}=\frac{s-2+2}{(s-2)^2+9}=\frac{s-2}{(s-2)^2+9}+\frac{2}{(s-2)^2+9}$$

Käyttäen kaavaa K8 saadaan

$$F(s)=\frac{s}{s^2+9}=\frac{s}{s^2+3^2} \leftrightarrow \cos 3t$$

Käyttäen sääntöä S4 saadaan

$$\frac{s-2}{(s-2)^2+9} = F(s-2) \leftrightarrow e^{2t}\cos 3t$$

Esimerkin 3 perusteella

$$\frac{2}{(s-2)^2+9} \leftrightarrow \frac{2}{3}e^{2t}\sin 3t\,.$$

Siis

$$\frac{s}{(s-2)^2+9} \leftrightarrow e^{2t}\cos 3t + \frac{2}{3}e^{2t}\sin 3t$$

5. Määritetään $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-5s+7}\right]$

Ratkaisu: Koska nimittäjän nollakohdat ovat imaginaariset, täydennetään nimittäjä neliöksi

$$s^2-5s+7 = s^2-2\cdot\frac{5}{2}s+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+7=\left(s-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(s-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Siis

$$\frac{1}{s^2-5s+7} = \frac{1}{\left(s-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,.$$

Koska

$$\frac{1}{s^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\,,$$

on säännön S4 perusteella

$$\frac{1}{\left(s-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \leftrightarrow e^{\frac{5}{2}t}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

6. Määritetään $L^{-1}\left[\dfrac{s+5}{s^2+6s+12}\right]$

Ratkaisu: Koska nimittäjän nollakohdat ovat imaginaariset, täydennetään nimittäjä neliöksi.

$$\frac{s+5}{s^2+6s+12} = \frac{s+5}{s^2+2\cdot 3s+3^2+12-3^2} = \frac{s+5}{(s+3)^2+3}$$

$$= \frac{s+3}{(s+3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} + \frac{2}{(s+3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} \leftrightarrow e^{-3t}\cos\sqrt{3}t + e^{-3t}\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$$

Tapaus 3: $R(s) = \dfrac{As+B}{\left(s^2+as+b\right)^n}$, missä nimittäjässä on reaalisesti jaoton 2. asteen polynomi.

Otetaan esille vain tapaus $n = 2$. Käänteismuuntaminen perustuu kaavoihin

$$\frac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2} \leftrightarrow \frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$$

$$\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2} \leftrightarrow \frac{t}{2a}\sin at$$

sekä sääntöön S4 ja neliöksi täydentämiseen kuten tapauksessa 2.

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1.3:

Muodosta Laplace-käänteismuunnos.

1. a) $\frac{3}{s+2}$ b) $\frac{1}{3s+6}$

   c) $\frac{10}{-2s+5}$

2. a) $\frac{3}{(s+2)^2}$ b) $\frac{3}{(s+2)^3}$

Sini- ja kosinifunktioihin johtavia käänteismuunnoksia:

3. a) $\frac{2s}{s^2+4}$ b) $\frac{1}{3s^2+4}$

4. a) $\frac{1}{(s-1)^2+2}$ b) $\frac{s}{(s-1)^2+2}$

Täydennä neliöksi ja muodosta Laplace-käänteismuunnos.

5. a) $\frac{2}{s^2+6s+13}$ b) $\frac{s+2}{s^2+6s+13}$

6. a) $\frac{1}{s^2+4s+6}$ b) $\frac{s}{s^2+4s+6}$

1.3.2.2 Osamurtokehitelmän käyttö

Yleisesti rationaalifunktion käänteismuuntaminen perustuu **osamurtokehitelmän** muodostamiseen. Osamurtokehitelmä muodostetaan seuraavasti:

1. Jaetaan nimittäjäpolynomi $Q(s)$ *reaalisiin alkutekijöihin*: esitetään polynomi $Q(s)$ ensimmäisen tai toisen asteen polynomien potenssien tulona. Toisen asteen polynomit ovat sellaisia joiden nollakohdat ovat imaginaarisia.
2. Muodostetaan polynomin $Q(s)$ tekijöiden perusteella *osamurtokehitelmä*, johon tulee termejä seuraavasti:

   - Nimittäjän tekijää $(s-a)^n$ vastaa summa

     $$\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s-a)^n}.$$

   - Nimittäjän tekijää $\left(s^2+as+b\right)^n$ vastaa summa

$$\frac{A_1 s + B_1}{s^2 + as + b} + \frac{A_2 s + B_2}{\left(s^2 + as + b\right)^2} + \cdots + \frac{A_n s + B_n}{\left(s^2 + as + b\right)^n}$$

Osamurtokehitelmä on näiden termien summa.

3. Kohdassa 2 esiintyvät kirjaimet $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ja $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ovat vakioita, joiden arvot määritetään asettamalla osamurtokehitelmä voimaan.

Erikoistapaus: Nimittäjän 1. asteen tekijöitä $s - a$ ja $s^2 + as + b$ vastaa osamurtokehitelmässä termit

$$\frac{A}{s-a} \text{ ja } \frac{As + B}{s^2 + as + b}.$$

Tarkastellaan osamurtokehitelmän ja Laplace-käänteisfunktion muodostamista esimerkkien avulla.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään $L^{-1}\left[\dfrac{2}{s^2 - 2s - 3}\right]$

   Ratkaisu: Nimittäjän nollakohdat ovat -1 ja 3, joten $s^2 - 2s - 3 = (s+1)(s-3)$.

   Osamurtokehitelmä on siis

   $$\frac{2}{(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} \qquad (*)$$

   Kerrotaan yhtälö (*) puolittain termillä $s+1$:

   $$\frac{2}{s-3} = A + \frac{B}{s-3}(s+1).$$

   Sijoittamalla tähän $s = -1$, saadaan

   $$\frac{2}{-1-3} = A + 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

   Kerrotaan yhtälö (*) puolittain termillä $s-3$:

   $$\frac{2}{s+1} = \frac{A}{s+1}(s-3) + B.$$

   Sijoittamalla tähän $s = 3$, saadaan

   $$\frac{2}{3+1} = 0 + B \Rightarrow B = \frac{1}{2}.$$

   Siis

   $$\frac{2}{s^2 - 2s - 3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3} \leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

Edellisen esimerkin laskutapa voidaan koota seuraavaksi *erikoismenetelmäksi*:

Osamurtokehitelmän kertoimien määrittäminen, kun nimittäjällä on eri suuret reaaliset nollakohdat:

Olkoon nimittäjäpolynomilla $Q(s)$ eri suuret nollakohdat $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Tällöin

$$Q(s) = c(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_k).$$

Osamurtokehitelmä on siten muotoa

$$\frac{P(s)}{c(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_k)} = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{A_k}{s-a_k},$$

missä $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ovat vakioita. Vakion A_1 määrittämiseksi[15] yhtälö kerrotaan $(s-a_1)$:llä:

$$\frac{P(s)}{c(s-a_2)\cdots(s-a_k)} = A_1 + (s-a_1)\left(\frac{A_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{A_k}{s-a_k}\right).$$

Sijoittamalla tähän $s = a_1$ saadaan

$$A_1 = \frac{P(a_1)}{c(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_k)}$$

Yleinen menetelmä osamurtokehitelmän kertoimien määrittämiseksi on seuraavanlainen:

1. Muodostetaan osamurtokehitelmä.
2. Kerrotaan yhtälö puolittain rationaalifunktion nimittäjällä.
3. Järjestetään vasemman ja oikean puolen polynomit s:n alenevien potenssien mukaan.
4. Verrataan s:n potenssien kertoimia ja asetetaan ne yhtä suuriksi.
5. Syntyneestä yhtälöryhmästä ratkaistaan osamurtokehitelmän kertoimet.

ESIMERKKEJÄ

2. Määritetään $L^{-1}\left[\dfrac{3s^2+s-6}{s^3-s^2-16s-20}\right]$

Ratkaisu: Nimittäjän nollakohdat ovat -2, -2 ja 5, joten

$$s^3 - s^2 - 16s - 20 = (s+2)^2(s-5).$$

Osamurtokehitelmä on

$$\frac{3s^2+s-6}{(s+2)^2(s-5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s-5}$$

Kerrotaan yhtälö puolittain lausekkeella $(s+2)^2(s-5)$

$$3s^2+s-6 = A(s+2)(s-5) + B(s-5) + C(s+2)^2$$

Lasketaan oikean puolen tulot ja järjestetään termit s:n alenevien potenssien mukaan:

$$3s^2+s-6 = A(s^2-3s-10) + B(s-5) + C(s^2+4s+4)$$
$$3s^2+s-6 = (A+C)s^2 + (-3A+B+4C)s - 10A - 5B + 4C$$

[15] Muut vakiot määrätään vastaavalla tavalla.

Yhtälön molemmilla puolilla on samat polynomit, joten s:n potenssien kertoimet ovat samat. Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A + C = 3 \\ -3A + B + 4C = 1 \\ -10A - 5B + 4C = -6 \end{cases},$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{cases} A = \dfrac{73}{49} \\ B = -\dfrac{4}{7} \\ C = \dfrac{74}{49} \end{cases}$$

Siten

$$\frac{3s^2 + s - 6}{s^3 - s^2 - 16s - 20} = \frac{73}{49}\frac{1}{s+2} - \frac{4}{7}\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{74}{49}\frac{1}{s-5}$$

$$\leftrightarrow \frac{73}{49}e^{-2t} - \frac{4}{7}te^{-2t} + \frac{74}{49}e^{5t}$$

3. Määritetään $L^{-1}\left[\dfrac{5s^2 + 20s + 12}{s^3 + 8s^2 + 22s + 24}\right]$.

Ratkaisu: Nimittäjän nollakohdat ovat -4, $-2 + i\sqrt{2}$ ja $-2 - i\sqrt{2}$. Siten nimittäjän alkutekijät ovat

$$s + 4$$

ja (ks. kappaleen 0.4 Huomautus)

$$\left(s + 2 - i\sqrt{2}\right)\left(s + 2 + i\sqrt{2}\right) = s^2 + 4s + 6.$$

Nimittäjä voidaan siis jakaa tekijöihin seuraavasti:

$$s^3 + 8s^2 + 22s + 24 = (s+4)\left(s^2 + 4s + 6\right).$$

Osamurtokehitelmä on

$$\frac{5s^2 + 20s + 12}{(s+4)\left(s^2 + 4s + 6\right)} = \frac{A}{s+4} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4s + 6}$$

Kerrotaan yhtälö puolittain lausekkeella $(s+4)\left(s^2 + 4s + 6\right)$

$$5s^2 + 20s + 12 = A\left(s^2 + 4s + 6\right) + (Bs + C)(s + 4)$$

Lasketaan oikean puolen tulot ja järjestetään termit s:n alenevien potenssien mukaan:

$$5s^2 + 20s + 12 = As^2 + 4As + 6A + Bs^2 + 4Bs + Cs + 4C$$

$$5s^2 + 20s + 12 = (A + B)s^2 + (4A + 4B + C)s + 6A + 4C$$

Yhtälön molemmilla puolilla on samat polynomit, joten s:n potenssien kertoimet ovat samat. Tästä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 4A+4B+C=20, \\ 6A+4C=12 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on

$$\begin{cases} A=2 \\ B=3 \\ C=0 \end{cases}$$

Siten

$$\frac{5s^2+20s+12}{(s+4)(s^2+4s+6)} = \frac{2}{s+4} + \frac{3s}{s^2+4s+6}.$$

Lausekkeen $\frac{3s}{s^2+4s+6}$ Laplace-käänteismuuntamista varten täydennetään nimittäjä neliöksi:

$$s^2+4s+6 = s^2+2\cdot 2s+2^2-2^2+6 = (s+2)^2+2.$$

Siis

$$\frac{3s}{s^2+4s+6} = \frac{3s}{(s+2)^2+2} = \frac{3(s+2)-6}{(s+2)^2+2} = \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{6}{(s+2)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}.$$

Siten

$$\frac{5s^2+20s+12}{s^3+8s^2+22s+24} = \frac{2}{s+4} + \frac{3(s+2)}{(s+2)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{6}{(s+2)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\leftrightarrow 2e^{-4t}+3e^{-2t}\cos\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{6}{\sqrt{2}}e^{-2t}\sin\left(\sqrt{2}t\right)$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1.3

Muodosta ensin osamurtokehitelmä ja sitten Laplace-käänteismuunnos.

7. a) $\frac{1}{s^2-1}$ b) $\frac{1}{s^2+s}$

8. a) $\frac{2s}{s^2-4}$ b) $\frac{-4s+46}{s^2+4s-32}$

9. a) $\frac{s-2}{s^2+s}$ b) $\frac{5s-4}{s^2-s-2}$

   c) $\frac{8s-5}{s^2-3s-10}$

10. a) $\frac{s+11}{s^3+4s^2+s-6}$ b) $\frac{1}{s^3+s^2}$

11. a) $\frac{5s^2+13s+9}{s^3+3s^2-4}$ b) $\frac{2s^2+3s+2}{s^3+s^2+s}$

1.4 Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen

Laplace-muunnokset soveltuvat hyvin lineaaristen vakiokertoimisten differentiaaliyhtälöiden ja differentiaaliyhtälöryhmien alkuarvoprobleemien ratkaisemiseen. Kun *alkuarvoprobleema* ratkaistaan Laplace-muunnoksella ei differentiaaliyhtälön yleistä ratkaisua muodosteta, vaan alkuarvot sijoitetaan heti Laplace-muunnokseen.

Seuraavassa oletetaan, että funktiot ovat (oikealta) jatkuvia origossa, jolloin $f(0+) = f(0)$.

Differentiaaliyhtälöiden ratkaiseminen perustuu Laplace-muunnoksen lineaarisuuteen ja seuraavaan derivaatan muunnossääntöön:

$$\boxed{f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)}$$

jonka erikoistapaukset ovat

$$\boxed{\begin{aligned} &f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0) \\ &f''(t) \leftrightarrow s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}}$$

1.4.1 Vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöiden ratkaisemista esimerkkien avulla.

ESIMERKKEJÄ

1. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö $y' - 3y = 8e^{2t}$, $y(0) = 2$.

   Ratkaisu: Laplace-muunnetaan differentiaaliyhtälö

   $$sY(s) - y(0) - 3Y(s) = 8\frac{1}{s-2}$$

   Sijoitetaan tähän alkuarvo

   $$sY(s) - 2 - 3Y(s) = \frac{8}{s-2}$$

   Ratkaistaan $Y(s)$

   $$(s-3)Y(s) = \frac{8}{s-2} + 2$$

   $$(s-3)Y(s) = \frac{2s+4}{s-2}$$

   $$Y(s) = \frac{2s+4}{(s-3)(s-2)}$$

   Määritetään $Y(s)$:n osamurtokehitelmä

   $$\frac{2s+4}{(s-3)(s-2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-2}, \text{ missä } \begin{cases} A = \dfrac{2\cdot 3+4}{3-2} = 10 \\ B = \dfrac{2\cdot 2+4}{2-3} = -8 \end{cases}$$

   Siis

$$Y(s)=\frac{10}{s-3}-\frac{8}{s-2}$$

Käänteismuuntamalla tämä saadaan ratkaisu:

$$y(t)=10e^{3t}-8e^{2t}$$

2. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö $x''+3x'-4x=e^{3t}$, $x(0)=2$, $x'(0)=1$.

<u>Ratkaisu</u>: Laplace-muunnetaan differentiaaliyhtälö

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+3(sX(s)-x(0))-4X(s)=\frac{1}{s-3}$$

Sijoitetaan tähän alkuarvo

$$s^2X(s)-2s-1+3(sX(s)-2)-4X(s)=\frac{1}{s-3}$$

Ratkaistaan $X(s)$

$$\left(s^2+3s-4\right)X(s)=\frac{1}{s-3}+2s+7$$

$$\left(s^2+3s-4\right)X(s)=\frac{2s^2+s-20}{s-3}$$

$$X(s)=\frac{2s^2+s-20}{\left(s^2+3s-4\right)(s-3)}.$$

Koska polynomin s^2+3s-4 nollakohdat ovat 1 ja –4, on

$$s^2+3s-4=(s-1)(s+4)$$

Siis $X(s)$:n osamurtokehitelmä on

$$\frac{2s^2+s-20}{(s-1)(s+4)(s-3)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+4}+\frac{C}{s-3},\ \text{missä}\ \begin{cases} A=\dfrac{2+1-20}{(1+4)(1-3)}=\dfrac{17}{10} \\ B=\dfrac{2\cdot(-4)^2-4-20}{(-4-1)(-4-3)}=\dfrac{8}{35} \\ C=\dfrac{2\cdot 3^2+3-20}{(3-1)(3+4)}=\dfrac{1}{14} \end{cases}$$

Siten

$$X(s)=\frac{17}{10}\frac{1}{s-1}+\frac{8}{35}\frac{1}{s+4}+\frac{1}{14}\frac{1}{s-3}$$

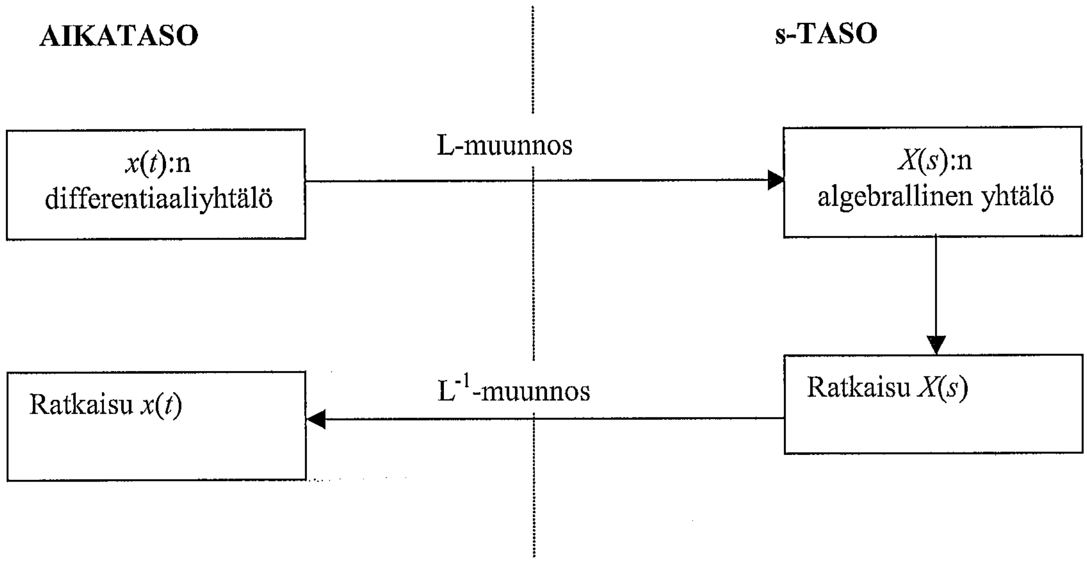
Käänteismuuntamalla tämä saadaan ratkaisu:

$$x(t)=\frac{17}{10}e^{t}+\frac{8}{25}e^{-4t}+\frac{1}{14}e^{3t}$$

Differentiaaliyhtälö ratkaistaan siis Laplace-muunnoksella siten, että *differentiaaliyhtälö muunnetaan algebralliseksi yhtälöksi, josta määrätään ratkaisun Laplace-muunnos*. Itse ratkaisu voidaan jakaa seuraaviin vaiheisiin:

1. Laplace-muunnetaan differentiaaliyhtälö. Otetaan alkuarvot huomioon Laplace-muunnoksissa. Näin syntyy algebrallinen yhtälö, joka on ensimmäistä astetta ratkaisun Laplace-muunnoksen suhteen.
2. Ratkaistaan kohdassa 1 saadusta algebrallisesta yhtälöstä ratkaisun Laplace-muunnos.
3. Käänteismuunnetaan ratkaisun Laplace-muunnos.

Kaaviona differentiaaliyhtälön ratkaiseminen voidaan esittää seuraavasti:



Aikatason differentiaaliyhtälöä vastaa siten s-tason algebrallinen yhtälö.

Huomautus: Jos *alkuarvot ovat nollia*, niin derivointia vastaa s-tasossa s:llä kertominen:

$$f'(t) \leftrightarrow sF(s)$$
$$f''(t) \leftrightarrow s^2F(s)$$
$$\ldots$$
$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^nF(s)$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1.4:

Ratkaise differentiaaliyhtälöt.

1. $y' + 2y = 0,\ y(0) = -3$
2. a) $y' + y = e^t,\ y(0) = 3$ b) $y' + y = e^{-t},\ y(0) = 3$
   c) $y' + y = t,\ y(0) = 3$
3. $y'' - y' + 6y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$
4. a) $y'' - 9y = e^{-2t},\ y(0) = 0, y'(0) = 0$ b) $y'' - 9y = e^{3t},\ y(0) = 0, y'(0) = 0$
5. a) $y'' + 5y' = e^{3t},\ y(0) = 1, y'(0) = 0$ b) $y'' + 5y' = 1,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$

6. $y'' - y' - 6y = t + \sin(2t),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

1.4.2 Differentiaaliyhtälöryhmä

Ratkaisuperiaate on sama kuin differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa:

1. Laplace-muunnetaan differentiaaliyhtälöt. Otetaan alkuarvot huomioon Laplace-muunnoksissa. Näin saadaan lineaarinen yhtälöryhmä.
2. Ratkaistaan kohdassa 1 saadusta lineaarisesta yhtälöryhmästä ratkaisujen Laplace-muunnokset.
3. Käänteismuunnetaan ratkaisujen Laplace-muunnokset.

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisemista esimerkin avulla.

ESIMERKKEJÄ

1. Ratkaistaan differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -2x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Laplace-muunnetaan differentiaaliyhtälöt. Otetaan alkuehdot huomioon.

$$\begin{cases} sX(s) - 1 = -X(s) + Y(s) \\ sY(s) - 1 = -2X(s) + Y(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+1)X(s) - Y(s) = 1 \\ 2X(s) + (s-1)Y(s) = 1 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari Cramerin säännöllä (ks. kappale 0.5). Yhtälöparin kerroindeterminantti on

$$\begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix} = (s+1)(s-1) + 2 = s^2 + 1,$$

joten

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & s-1 \end{vmatrix}}{s^2+1} = \frac{(s-1)+1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} \leftrightarrow \cos t$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{s^2+1} = \frac{(s+1)-2}{s^2+1} = \frac{s-1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} \leftrightarrow \cos t - \sin t$$

Ratkaisu on siis

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos t - \sin t \end{cases}$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1.4:

Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmät.

7. $\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = y - 2x \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 8 \\ y(0) = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = -2x + 4y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = x + y + \sin t \\ y' = 5x - 3y - \cos t \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + t \\ y' = 3x + 2y + 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = -0{,}32 \\ y(0) = 1{,}68 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x'' + y' + x = 7e^{-2t} \\ y'' + x' - x = 7e^{-2t} \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x'(0) = 1 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$

1.4.3 Matematiikkaohjelmien käyttö

Edellisissä kappaleissa todettiin, että differentiaaliyhtälön tai differentiaaliyhtälöryhmän ratkaiseminen Laplace-muunnosta käyttäen voidaan jakaa seuraaviin vaiheisiin:

1. Laplace-muunnetaan differentiaaliyhtälöt.
2. Ratkaistaan kohdassa 1 saaduista algebrallisesta yhtälöstä ratkaisun Laplace-muunnos.
3. Käänteismuunnetaan ratkaisun Laplace-muunnos.

Sopivaa matematiikkaohjelmaa käytettäessä on käsin laskettava ainoastaan kohdan 1 differentiaaliyhtälöissä esiintyvien tuntemattomien funktioiden ja niiden derivaattojen Laplace-muunnokset derivaatan Laplace-muunnossääntöä käyttäen. Tämä sääntö ottaa automaattisesti huomioon alkuarvot. Lopun voi tehdä matematiikkaohjelmalla.

Seuraavissa esimerkeissä esitellään **Maplen** käyttöä differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa Laplace-muunnosten avulla. Sama tekniikka toimii myös esimerkiksi laskimessa **TI-89**[16].

Maplea käytettäessä on ensin ladattava integraalimuunnosohjelmat muistiin komennolla

```
> with(inttrans):
```

ESIMERKKEJÄ

1. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$y'' + 7y' + 12y = t + \cos 2t, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -3.$$

Laplace-muunnetaan differenssiyhtälön vasen puoli käsin ja oikea puoli Maplella (Maplen komento **laplace**)

```
> s^2*Y-2*s+3+7*(s*Y-2)+12*Y=laplace(t+cos(2*t),t,s);
```

$$s^2\,Y - 2\,s - 11 + 7\,s\,Y + 12\,Y = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+4}$$

Ratkaistaan tästä ratkaisun Laplace-muunnos Y (Maplen komento **solve**; % viittaa edelliseen tulokseen):

```
> solve(%,Y);
```

[16] Laskimeen TI-89 voi netistä imuroida Laplace-muunnosohjelman.

$$\frac{2\,s^5+9\,s^3+11\,s^4+45\,s^2+4}{s^2\,(s^2+4)\,(s^2+7\,s+12)}$$

Ratkaisu on tämän Laplace-käänteismuunnos (Maplen komento **invlaplace**):

```
> invlaplace(%,s,t);
```

$$-\frac{229}{80}\,\mathrm{e}^{(-4\,t)}+\frac{571}{117}\,\mathrm{e}^{(-3\,t)}+\frac{2}{65}\cos(2\,t)+\frac{7}{130}\sin(2\,t)+\frac{t}{12}-\frac{7}{144}$$

Siis differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$y=-\frac{229}{80}e^{-4t}+\frac{571}{117}e^{-3t}+\frac{2}{65}\cos 2t+\frac{7}{130}\sin 2t+\frac{t}{12}-\frac{7}{144}$$

2. Ratkaistaan differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases}x'=4x-5y+\sin 2t\\ y'=-x+7y+\cos t\end{cases}\qquad\begin{cases}x(0)=2\\ y(0)=-1\end{cases}$$

Laplace-muunnetaan differentiaaliyhtälöt. Sijoitetaan ne muuttujiin yht1 ja yht2.

```
> yht1:=s*X-2=4*X-5*Y+laplace(sin(2*t),t,s);
```

$$yht1:=s\,X-2=4\,X-5\,Y+\frac{2}{s^2+4}$$

```
> yht2:=s*Y+1=-X+7*Y+laplace(cos(t),t,s);
```

$$yht2:=s\,Y+1=-X+7\,Y+\frac{s}{s^2+1}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmästä ratkaisujen Laplace-muunnokset X ja Y:

```
> ratk:=solve({yht1, yht2}, {X, Y});
```

$$ratk:=\{X=\frac{-9\,s^4-59\,s^2-10\,s+7\,s^3-50+2\,s^5}{28\,s^4+119\,s^2+92+s^6-11\,s^5-55\,s^3-44\,s},$$
$$Y=-\frac{s^5-3\,s^4+9\,s^3-12\,s^2+20\,s-6}{28\,s^4+119\,s^2+92+s^6-11\,s^5-55\,s^3-44\,s}\}$$

Laplace-käänteismuunnetaan, jolloin saadaan **ratkaisu**.

```
> invlaplace(rhs(ratk[1]),s,t);    # x(t):n lauseke
```

$$-\frac{2}{11}\cos(t)+\frac{1}{11}\sin(t)-\frac{232}{845}\cos(t)^2+\frac{116}{845}-\frac{354}{845}\sin(t)\cos(t)$$
$$+\frac{1}{9295}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{11\,t}{2}\right)}\left(21556\cosh\left(\frac{t\sqrt{29}}{2}\right)+\frac{10652}{29}\sqrt{29}\sinh\left(\frac{t\sqrt{29}}{2}\right)\right)$$

```
> invlaplace(rhs(ratk[2]),s,t);    # y(t):n lauseke
```

$$-\frac{44}{845}\cos(t)^2+\frac{22}{845}-\frac{38}{845}\sin(t)\cos(t)-\frac{9}{55}\cos(t)+\frac{2}{55}\sin(t)$$
$$-\frac{1}{9295}\,\mathrm{e}^{\left(\frac{11\,t}{2}\right)}\left(7532\cosh\left(\frac{t\sqrt{29}}{2}\right)+\frac{65708}{29}\sqrt{29}\sinh\left(\frac{t\sqrt{29}}{2}\right)\right)$$

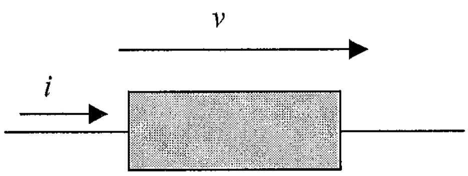
Edellä **ratk[1]** viittaa listan ensimmäiseen alkioon, josta **rhs** poimii oikean puolen (**lhs** poimii yhtälön vasemman puolen).

Huomautus. Maplessa voidaan differentiaaliyhtälö ja differentiaaliyhtälöryhmä ratkaista suoraan komennolla **dsolve.**

1.5 Sovelluksia

1.5.1 Sähköiset peruskomponentit s-tasossa

Passiiviset sähköpiirit koostuvat kolmesta peruskomponentista: *vastus*, *kondensaattori* ja *kela*. Lisäksi piirissä on *jännite- tai virtalähteitä*, jotka voivat olla vakioita (tasajännite tai -virta) tai ajan funktioita (vaihtojännite tai -virta).



Tarkastellaan peruskomponenttien läpi kulkevan *sähkövirran* i ja komponentin päiden *jänniteeron* eli *jännitehäviön* v välistä yhteyttä. Vastaavat isot kirjaimet tarkoittavat Laplace-muunnoksia:

$$i \leftrightarrow I$$

$$v \leftrightarrow V$$

Seuraavissa tarkasteluissa *ajan alkuhetki* on $t = 0$.

Sähkövirran voimakkuus i *on sähkövarauksen* q *muutosnopeus* eli sähkövarauksen derivaatta ajan t suhteen:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Jos varaus alkuhetkellä on nolla, niin

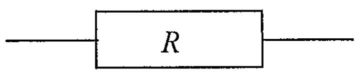
$$q(t) = \int_0^t i dt$$

Vastus R

Vastuksen *resistanssi* R on vastuksen jännitteen ja virran suhde. Siis jännitehäviö on

$$v = Ri$$

Laplace-muunnettuna tämä on



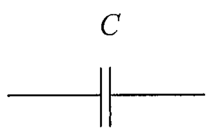
$$V = RI$$

Kondensaattori C

Kondensaattorin *kapasitanssi* C on kondensaattorin varauksen ja jännitteen suhde. Siis varaus

$$q = Cv.$$

Derivoimalla saadaan



$$i = C\frac{dv}{dt}$$

Jos kondensaattorin *varaus tai jännite alkuhetkellä on nolla,* niin jännitehäviö

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i dt.$$

Tämän Laplace-muunnos on (sääntö S8)

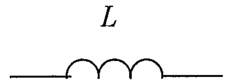
$$V = \frac{1}{Cs}I.$$

Kela ***L***

Kelan *induktanssi* L on jännitteen ja virran muutosnopeuden suhde. Siis jännitehäviö

$$v = L\frac{di}{dt}$$

Jos *virran voimakkuus alkuhetkellä on nolla,* niin



$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v dt.$$

Tämän (tai tämän edellisen) Laplace-muunnos on

$$V = LsI.$$

Yhteenvetona voidaan todeta, että jos *peruskomponentin alkutila on nolla,* niin

Peruskomponentin jännite-eron Laplace-muunnos saadaan kertomalla virran voimakkuuden Laplace-muunnos lausekkeella Z

$$V = ZI,$$

missä Z on

- R *vastukselle,* jonka resistanssi on R
- $\frac{1}{Cs}$ *kondensaattorille,* jonka kapasitanssi on C
- Ls *kelalle,* jonka induktanssi on L

1.5.2 RLC-piirin ratkaiseminen

Sähköiset peruspiirit voidaan ratkaista käyttämällä **Kirchhoffin**[17] **lakeja**:

- **Virtalaki**: Johtimien liitoskohtaan tulevien ja siitä poistuvien virtojen summa on yhtä suuri.
- **Jännitelaki**: Virtapiirin jokaisessa silmukassa lähdejännitteiden summa on jännitehäviöiden summa.

RLC-piirien ratkaisemiseen on kaksi tapaa:

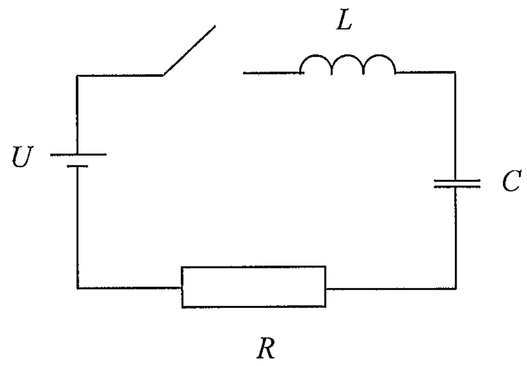
[17] **Gustav Robert Kirchhoff** (1824-87) oli saksalainen fyysikko, joka loi perustan modernille lämpösäteilyteorialle ja spektrianalyysille. Keksi myös lait virran haarautumisesta sähköjohtimissa.

1. Virtapiirejä kuvaavat yhtälöt kirjoitetaan *aikatasossa*, jolloin syntyy differentiaali- ja integraaliyhtälöitä . Nämä ratkaistaan esimerkiksi Laplace-muunnostekniikalla.
2. Piirretään *vastinpiiri s-tasossa*. Muodostetaan Laplace-muunnoksia koskevat algebralliset yhtälöt, joista ratkaistaan kysyttyjen suureiden Laplace-muunnokset. Nämä sitten käänteismuunnetaan.

Seuraavassa käytetään jälkimmäistä tekniikka. Tarkastellaan virtapiirien ratkaisemista esimerkkien avulla.

ESIMERKKEJÄ

1. Kuvan virtapiirissä $R = 2\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 0{,}5$ F ja $U = 50$ V. Kytkin suljetaan hetkellä $t = 0$, jolloin kondensaattorin jännite ja kelan virta ovat nollia. Määritä virranvoimakkuus ajan funktiona.



Ratkaisu: Piirretään vastinpiiri s-tasossa.

Lasketaan perusyksiköissä Ω, H, F, V ja jätetään yksiköt merkitsemättä.

Kirchhoffin jännitelain mukaan ($I = I(s)$)

$$RI + sLI + \frac{1}{sC}I = \frac{U}{s}$$

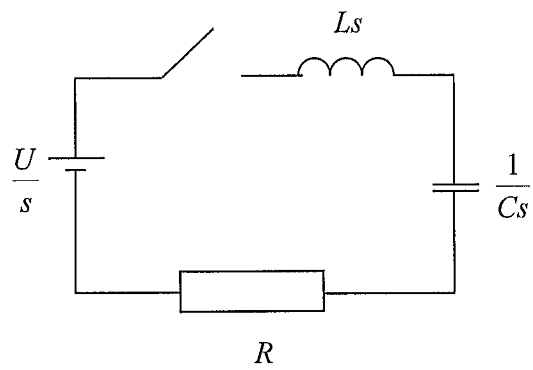
Sijoittamalla arvot saadaan

$$2I + sI + \frac{1}{0{,}5s}I = \frac{50}{s}$$

Kerrotaan yhtälö puolittain s:llä ja muokataan

$$2sI + s^2I + 2I = 50$$

$$\left(s^2 + 2s + 2\right)I = 50$$

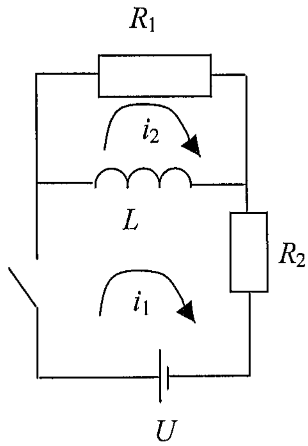


Ratkaistaan I ja käänteismuunnetaan.

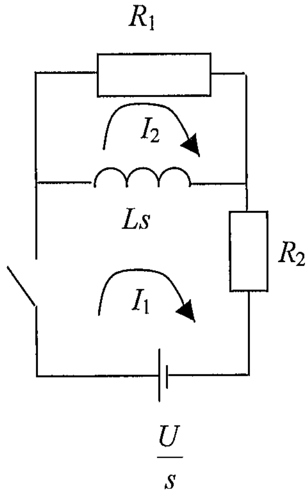
$$I = \frac{50}{s^2 + 2s + 2} = \frac{50}{s^2 + 2s + 1 - 1 + 2} = \frac{50}{(s+1)^2 + 1} \leftrightarrow 50e^{-t}\sin t$$

Vastaus: Virranvoimakkuus $i = 50e^{-t}\sin t$ A .

2. Kuvan virtapiirissä $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $L = 0{,}02$ H ja $U = 100$ V. Kytkin suljetaan hetkellä $t = 0$, jolloin kelan virta on nolla. Määritä virranvoimakkuudet ajan funktiona.



Ratkaisu: Piirretään vastinpiiri s-tasossa.



Lasketaan perusyksiköissä Ω, H, F, V ja jätetään yksiköt merkitsemättä.

Käytetään Kirchhoffin jännitelakia virtasilmukoihin

$$\begin{cases} LsI_1 + R_2I_1 - LsI_2 = \dfrac{U}{s} \\ R_1I_2 + LsI_2 - LsI_1 = 0 \end{cases}$$

Sijoittamalla arvot saadaan

$$\begin{cases} 0{,}02sI_1 + 10I_1 - 0{,}02sI_2 = \dfrac{100}{s} \\ 5I_2 + 0{,}02sI_2 - 0{,}02sI_1 = 0 \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} (0{,}02s + 10)I_1 - 0{,}02sI_2 = \dfrac{100}{s} \\ -0{,}02sI_1 + (0{,}02s + 5)I_2 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöpari Cramerin säännöllä. Kerroindeterminantti on

$$\begin{vmatrix} 0{,}02s + 10 & -0.02s \\ -0{,}02s & 0.02s + 5 \end{vmatrix} = (0{,}02s + 10)(0{,}02s + 5) - (0{,}02s)^2 = 0{,}3s + 50 .$$

Siis

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{100}{s} & -0{,}02s \\ 0 & 0{,}02s + 5 \end{vmatrix}}{0{,}3s + 50} = \frac{2 + \dfrac{500}{s}}{0{,}3s + 50} = \frac{2s + 500}{s(0{,}3s + 50)} = \frac{2s + 500}{0{,}3s(s + 166{,}7)}$$

Muodostetaan osamurtokehitelmä

$$\frac{2s + 500}{0{,}3s(s + 166{,}7)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 166{,}7}, \quad \text{missä} \quad \begin{cases} A = \dfrac{500}{0{,}3 \cdot 166{,}7} = 10 \\ B = \dfrac{2 \cdot (-166{,}7) + 500}{0{,}3 \cdot (-166{,}7)} = -3{,}33 \end{cases}$$

Siis

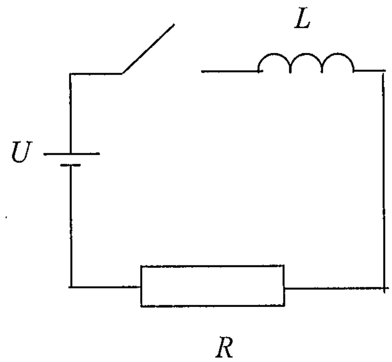
$$I_1 = \frac{10}{s} - \frac{3{,}33}{s+166{,}7} \leftrightarrow 10 - 3{,}33e^{-166{,}7t}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0{,}02s+10 & \frac{100}{s} \\ -0{,}02s & 0 \end{vmatrix}}{0{,}3s+50} = \frac{2}{0{,}3s+50} = \frac{2}{0{,}3(s+166{,}7)} \leftrightarrow 6{,}67e^{-166{,}7t}$$

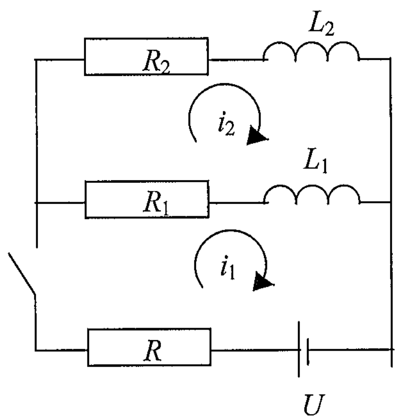
Vastaus: Virranvoimakkuudet ovat $i_1 = \left(10 - 3{,}3e^{-166{,}7t}\right)$A, $i_2 = \left(6{,}67e^{-166{,}7t}\right)$A

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1.5:

1. Kuvan RL-piirissä kytkin suljetaan hetkellä $t = 0$. Määritä sähkövirran voimakkuus ajan funktiona, kun $R = 1\ \Omega$, $L = 2$ H ja lähdejännite $U = 10\sin 50t$ V.



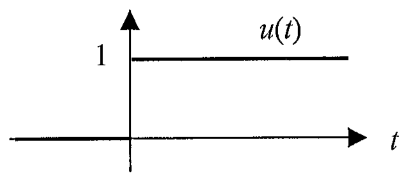
2. Kuvan kytkennässä on $U = 110$ V, $R = 30\ \Omega$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $L_1 = 1$ H ja $L_2 = 3$ H. Hetkellä $t = 0$ kytkin suljetaan. Määritä sähkövirtojen voimakkuudet i_1 ja i_2 ajan t funktiona.



1.6 Erikoisfunktioita

1.6.1 Yksikköaskel

Yksikköaskel eli **Heavisiden**[18] **funktio** u määritellään seuraavasti:



---

[18] **Oliver Heaviside** (1850-1925) oli englantilainen fyysikko ja teoreettisen sähkötekniikan tutkija. Hän kehitti operaattorilaskennan, joka yksinkertaisti sähkötekniikan laskutoimituksia. Hänen tutkimuksensa loivat perustan radioliikenteelle.

$$u(t) = \begin{cases} 0, \text{kun } t < 0 \\ 1, \text{kun } t \geq 0 \end{cases}$$

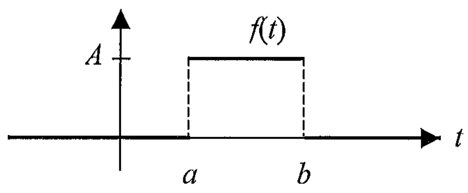
Hyppäys 0:sta ykköseen tapahtuu siis hetkellä $t = 0$. Jos hyppäys tapahtuu hetkellä $t = a$, niin on kyseessä funktio $u(t-a)$.

Sakarapulssi määritellään seuraavasti:

$$f(t) = \begin{cases} A, \text{kun } a \leq t < b \\ 0, \text{muulloin} \end{cases}$$

Yksikköaskelta käyttäen tämä voidaan kirjoittaa

$$f(t) = A[u(t-a) - u(t-b)]$$



Yksikköaskeleen Laplace-muunnos on (kaava K1)

$$L[u(t)] = \frac{1}{s}.$$

Sääntöä S5 käyttäen saadaan ($a \geq 0$)

$$L[u(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$$

Siten sakarapulssin Laplace-muunnos on ($b > a \geq 0$)

$$L[f(t)] = L[A[u(t-a) - u(t-b)]] = A(L[u(t-a)] - L[u(t-b)])$$

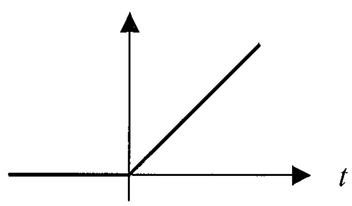
$$= A\left(\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-bs}}{s}\right) = A\frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$$

Yksikköpenger p määritellään seuraavasti:

$$p(t) = \begin{cases} 0, \text{kun } t < 0 \\ t, \text{kun } t \geq 0 \end{cases}$$

Yksikköaskelta käyttäen tämä voidaan kirjoittaa

$$p(t) = tu(t)$$



Yksikköpenkereen Laplace-muunnos on (kaava K2)

$$L[p(t)] = \frac{1}{s^2}.$$

Viivästetyn yksikköpenkereen

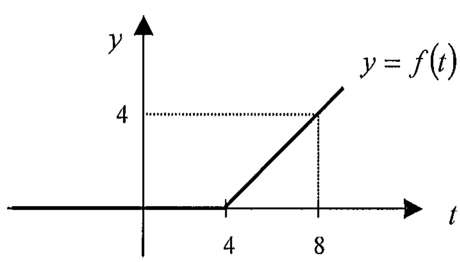
$$p(t-a) = u(t-a)p(t-a),$$

Laplace-muunnos saadaan sääntöä S5 käyttäen ($a \geq 0$)

$$L[p(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s^2}.$$

ESIMERKKEJÄ

1. Muodosta kuvan funktion $f(t)$ Laplace-muunnos.



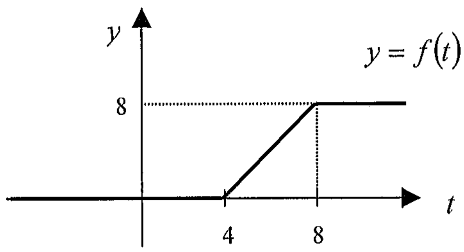
Ratkaisu: Funktio saadaan siirtämällä yksikköpengertä 4 yksikköä positiiviseen suuntaan. Siis

$$f(t) = p(t-4)$$

Siten Laplace-muunnos on

$$L[f(t)] = e^{-4s} L[p(t)] = \frac{e^{-4s}}{s^2}$$

2. Muodosta kuvan funktion $f(t)$ Laplace-muunnos.



Ratkaisu: Funktio voidaan lausua yksikköpengertä käyttäen seuraavasti (Huomaa muodostustapa!)

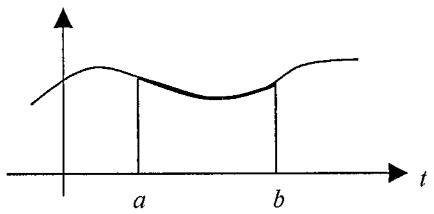
$$f(t) = 2(p(t-4) - p(t-8)).$$

Siten Laplace-muunnos on

$$L[f(t)] = \frac{2}{s^2}\left(e^{-4s} - e^{-8s}\right)$$

3. Olkoon f reaaliakselilla määritelty funktio. Funktiosta f voidaan leikata välillä $[a,b]$ oleva osa

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{kun } a \le t < b \\ 0 & \text{, muulloin} \end{cases}$$



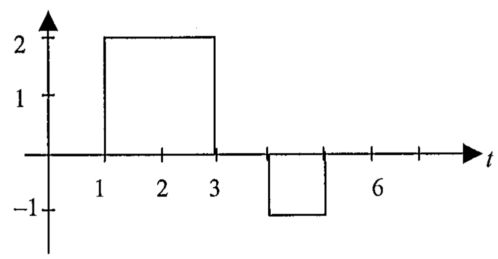
yksikköaskelta käyttäen

$$g(t) = f(t)[u(t-a) - u(t-b)].$$

Sakarapulssi saadaan leikkaamalla osa vakiofunktiosta.

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1.6:

1. Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat
   a) $f(t) = 2u(t-1)$
   b) $f(t) = 3(u(t-2) - u(t-5))$
   c) $f(t) = 3u(t-2) - u(t-5)$
2. Lausu kuvan funktio yksikköaskelta käyttäen. Muodosta Laplace-muunnos.

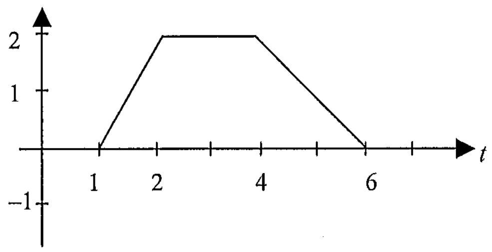


3. Määritellään **signumfunktio** seuraavasti:

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}-1, \text{kun } t<0\\ 0, \text{kun } t=0\\ 1, \text{kun } t>0\end{cases}$$

Lausu tämä yksikköaskelta käyttäen.

4. Lausu kuvan funktio yksikköaskelta ja yksikköpengertä käyttäen. Muodosta Laplace-muunnos.



1.6.2 Diracin deltafunktio

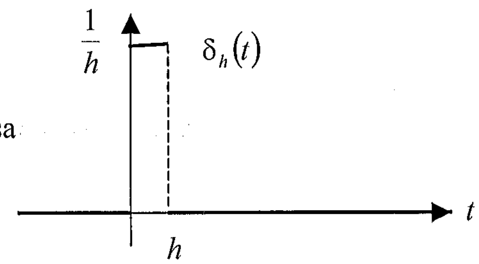
Järjestelmiä voidaan tutkia viemällä järjestelmän sisäänmenoon erilaisia *testisignaaleja* ja tutkimalla järjestelmän vastetta tällaisiin signaaleihin. Eräs paljon käytetty testisignaali on *hyvin voimakas ja kapea pulssi.* Idealisoidussa muodossa tämä voidaan muodostaa sakarapulssin raja-arvona seuraavasti:

Tarkastellaan sakarapulssia

$$\delta_h(t)=\begin{cases}\frac{1}{h}, \text{kun } 0\le t<h\\ 0, \text{muulloin}\end{cases}$$

Yksikköaskelta käyttäen tämä voidaan esittää muodossa

$$\delta_h(t)=\frac{u(t)-u(t-h)}{h}$$



Kun h lähestyy nollaa, niin pulssin $\delta_h(t)$ korkeus $\frac{1}{h}$ kasvaa rajatta ja leveys h lähestyy nollaa. Pulssin pinta-ala on kuitenkin aina yksi:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_h(t)dt=\int_0^h\delta_h(t)dt=\frac{1}{h}\cdot h=1.$$

Voidaan ajatella, että raja-arvona saadaan origossa äärettömän korkea ja äärettömän kapea pulssi **Diracin**[19] **deltafunktio** eli **yksikköimpulssifunktio**

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\delta_h(t)=\lim_{h\to 0}\frac{u(t)-u(t-h)}{h},$$

jolle pätee

[19] **Paul Dirac** (1902-84) oli englantilainen matemaatikko ja fyysikko. Hän tutki kvanttimekaniikkaa. Dirac sai Nobelin fysiikan palkinnon v. 1933.

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, \text{kun } t=0\\ 0, \text{kun } t\neq 0\end{cases}$$

ja

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1.$$

Oikeastaan kyseessä on ns. **yleistetty funktio** eli **distribuutio**, jolla on ominaisuudet:

- $\delta(t)=0$, kun $t\neq 0$
- Jos f on jatkuva pisteessä a, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-a)dt=f(a) \qquad (*)$$

Yhtälö (*) voidaan myös kirjoittaa muodossa

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(a-t)dt=f(a).$$

Perustellaan yhtälö (*) jatkuvan funktion tapauksessa: Funktion δ_h määritelmän perusteella

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta_h(t-a)dt=\frac{1}{h}\int_{a}^{a+\frac{1}{h}}f(t)dt.$$

Jos f on jatkuva pisteen a ympäristössä, niin integraalilaskennan väliarvolauseen mukaan on olemassa $\xi\in\left]a,a+\frac{1}{h}\right[$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta_h(t-a)dt=\frac{1}{h}f(\xi)h=f(\xi)$$

Ottamalla tästä raja-arvo, kun $h\to 0$, saadaan yhtälö (*).

Formaalisti[20]

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=\begin{cases}0, \text{kun } t<0\\ 1, \text{kun } t\geq 0\end{cases}$$

ja

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0}\frac{u(t)-u(t-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(t-h)-u(t)}{-h}=\frac{d}{dt}u(t)$$

Yksikköaskeleella ja Diracin deltafunktiolla on siten seuraavat yhteydet:

[20] Tarkat perustelut edellyttävät distribuutioiden teoriaa.

- $u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt$
- $\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$

Diracin deltafunktio on siis *yksikköaskelfunktion derivaatta.* Tämä kuvastaa sitä, että yksikköaskelfunktion muutosnopeus on nolla, kun $t \neq 0$ ja ääretön kun $t = 0$.

Diracin deltafunktion Laplace-muunnos

$$L[\delta(t)] = 1,$$

sillä

$$L[\delta(t)] = \int_{0}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{0} = 1.$$

Käyttäen sääntöä S5 saadaan yleisempi kaava

$$L[\delta(t-a)] = e^{-as},$$

missä $a \geq 0$.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritä $\int_{-\infty}^{\infty} (2t^2 + t)\delta(t-3)dt$.

   Ratkaisu: Yksikköimpulssifunktion ominaisuuden perusteella integraalin arvo on funktion $2t^2 + t$ arvo pisteessä 3. Siis

   $$\int_{-\infty}^{\infty} (2t^2 + t)\delta(t-3)dt = 2 \cdot 3^2 + 3 = 21.$$

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö $y'' - y = \delta(t-3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

   Ratkaisu: Laplace-muunnetaan differentiaaliyhtälö

   $$s^2Y(s) - 2s - 1 - Y(s) = e^{-3s}$$

   Ratkaistaan $Y(s)$

   $$(s^2 - 1)Y(s) = 2s + 1 + e^{-3s}$$

   $$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2-1} + \frac{e^{-3s}}{s^2-1}$$

   Koska $s^2 - 1 = (s+1)(s-1)$, muodostetaan osamurtokehitelmä

   $$\frac{2s+1}{(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1}, \text{ missä } \begin{cases} A = \dfrac{2 \cdot (-1) + 1}{-1-1} = \dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{2 \cdot 1 + 1}{1+1} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

   Siten

$$\frac{2s+3}{(s+1)(s-1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{s-1}\leftrightarrow\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{t}$$

Kaavan K9 ja säännön S5 mukaan

$$\frac{e^{-3s}}{s^2-1}\leftrightarrow u(t-3)\sinh(t-3).$$

Siis differentiaaliyhtälön ratkaisu on

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{3}{2}e^{t}+u(t-3)\sinh(t-3)$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1.6:

5. Ratkaise differentiaaliyhtälöt
   a) $y''+y=\delta(t)$
   b) $y''-3y'=\delta(t-2)$
   c) $y''+y=u(t-1)$

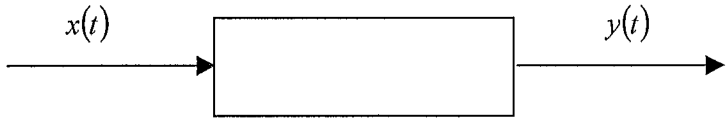
   Alkuarvot kaikissa kohdissa ovat $y(0)=y'(0)=0$.

1.7 Siirtofunktio

1.7.1 Lineaarinen järjestelmä

Järjestelmällä tarkoitetaan sähköistä tai mekaanista laitetta tai systeemiä, jolla on tietty *sisäänmenosignaali (input)* ja tietty *ulostulosignaali (output)*. Jos järjestelmän sisäisellä rakenteella ei ole merkitystä, kuvataan järjestelmä usein *mustana laatikkona*. Seuraavassa sisäänmenosignaalia sanotaan **herätteeksi** ja ulostulosignaalia **vasteeksi**.

Tarkastellaan yleisesti järjestelmää, jonka heräte on $x(t)$ ja vaste on $y(t)=P[x(t)]$:



Järjestelmä on **lineaarinen**, jos vaste riippuu lineaarisesti herätteestä:

$$P(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1P(x_1)+\lambda_2P(x_2)$$

kaikille herätteille x_1 ja x_2, missä λ_1 ja λ_2 ovat vakioita. Tämä voidaan yleistää mielivaltaisille summille

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kP(x_k),$$

missä $x_1,\ldots,x_n$ ovat herätteitä ja $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ ovat vakioita.

ESIMERKKEJÄ

1. **Toisen kertaluvun järjestelmä.** Lineaarisia järjestelmiä **mallinnetaan** usein **differentiaaliyhtälöillä.**

   Tarkastellaan seuraavanlaista *2. kertaluvun mallia*:

   $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t),$$

   missä $x(t)$ on järjestelmän heräte, $y(t)$ on järjestelmän vaste ja kertoimet a_0, a_1, a_2, b_0 ovat vakioita, $a_2 \neq 0$.

   Asetetaan lisäksi vaatimus, että hetkellä $t = 0$ järjestelmä on **lepotilassa** eli differentiaaliyhtälön ratkaisun *y alkuarvot ovat nollia*:

   $$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

   Tällöin[21] *vaste y riippuu lineaarisesti herätteestä x*:

   Jos $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$ ja λ_1, λ_2 ovat vakioita, niin

   $$a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = b_0 x_1$$

   $$a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2 = b_0 x_2 .$$

   Siten

   $$\begin{aligned} &a_2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)'' + a_1(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' + a_0(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \\ &= \lambda_1(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + \lambda_2(a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) \\ &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \end{aligned}$$

   ja

   $$\begin{cases} \lambda_1 y_1(0) + \lambda_2 y_2(0) = 0 \\ \lambda_1 y_1'(0) + \lambda_2 y_2'(0) = 0 \end{cases}.$$

   Täten

   $$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

   on differentiaaliyhtälön

   $$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))$$

   ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot

   $$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

   Ratkaisun yksikäsitteisyyden nojalla

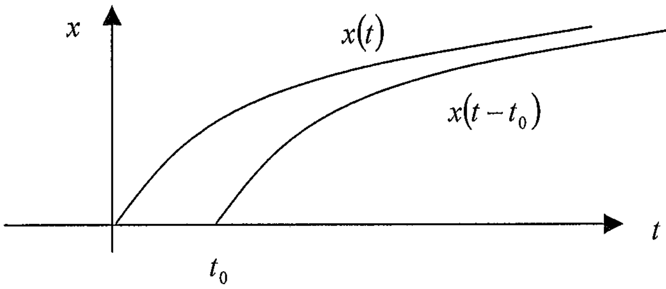
   $$P(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 P(x_1) + \lambda_2 P(x_2).$$

   Siis kyseessä on lineaarinen järjestelmä.

---

[21] Jätetään aikariippuvuus t merkitsemättä.

2. Tarkastellaan **puhdasta viivettä** eli järjestelmää, jossa signaalien viive on $t_0 \geq 0$. Jos järjestelmän heräte on $x(t)$, niin vaste on $x_d(t) = x(t - t_0)$. Tämä järjestelmä on lineaarinen. Tarkista asia määritelmään perustuen!



Lineaarista järjestelmää sanotaan **aikainvariantiksi**, jos sen käyttäytyminen ei riipu ajasta. Tämä voidaan ilmaista matemaattisesti seuraavasti:

$$\boxed{\text{Jos herätteen } x(t) \text{ vaste on } y(t)\text{, niin herätteen } x(t-t_0) \text{ vaste on } y(t-t_0)}$$

eli

jos $y(t) = P[x(t)]$, niin $y(t - t_0) = P[x(t - t_0)]$.

Lineaarisen järjestelmän **impulssivasteella** tarkoitetaan *yksikköimpulssin vastetta.*

ESIMERKKEJÄ

3. Tarkastellaan *puhdasta viivettä,* jossa viive on $t_0 \geq 0$. Tämän järjestelmän impulssivaste on

$$h(t) = \delta(t - t_0).$$

1.7.2 Konvoluutio

Olkoon $f(t)$ ja $g(t)$ Laplace-muuntuvia funktioita, joille pätee

$$f(t) = g(t) = 0, \text{ kun } t < 0.$$

Funktioiden *f* ja *g* konvoluutiolla tarkoitetaan funktiota

$$\boxed{(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du}$$

Voidaan osoittaa, että konvoluution Laplace-muunnos määritetään seuraavasti:

$$L[(f * g)(t)] = L[f(t)]L[g(t)]$$

eli

$$\boxed{(f * g)(t) \leftrightarrow F(s)G(s).}$$

Siis *aikatason konvoluutiota vastaa s-tasossa tulo.*

Tämän kaavan perusteella voidaan päätellä, että konvoluutiolle pätee

- *vaihdantalaki*: $f * g = g * f$
- *liitäntälaki*: $f * (g * h) = (f * g) * h$
- *osittelulaki*: $f * (g + h) = f * g + f * h$

Kappaleen 1.6.2 mukaan

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(t-u)du=\int_{0}^{\infty} f(u)\delta(t-u)du .$$

Koska $\delta(t-u)=0$, kun $u>t$, voidaan tämä kirjoittaa muotoon

$$f(t)=\int_{0}^{t} f(u)\delta(t-u)du .$$

Siis

$$f=f*\delta,$$

mistä nähdään, että *Diracin deltafunktio on konvoluutiotulon yksikköalkio.*

Konvoluution sovelluksena tarkastellaan *lineaarista aikainvarianttia järjestelmää P*, jonka impulssivaste on $h(t)$:

$$h(t)=P[\delta(t)].$$

Olkoon järjestelmän heräte $x(t)$ sellainen, että $x(t)=0$, kun $t<0$. Tällöin

$$x(t)=(x*\delta)(t)=\int_{0}^{t} x(u)\delta(t-u)du .$$

Pienten differentiaalien menetelmässä integraalin

$$\int_{0}^{t} x(u)\delta(t-u)du$$

ajatellaan olevan termien $x(u)\delta(t-u)du$ ääretön summa. Koska järjestelmä on lineaarinen on järjestelmän vaste[22]

$$y(t)=P[x(t)]=P\left[\int_{0}^{t} x(u)\delta(t-u)du\right]=\int_{0}^{t} x(u)P[\delta(t-u)]dx .$$

Järjestelmän aikainvarianssin perusteella

$$P[\delta(t-u)]=h(t-u),$$

joten

$$y(t)=\int_{0}^{t} x(u)h(t-u)du=(x*h)(t)$$

Konvoluution vaihdannaisuuden perusteella tämä voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$y(t)=(h*x)(t)$$

Saadaan siis seuraavaa tulos:

Jos järjestelmän impulssivaste on $h(t)$, niin herätteen $x(t)$ vaste on $y(t)=(h*x)(t)$.

[22] Tarkka perustelu sivuutetaan.

ESIMERKKEJÄ

1. Lineaarisen järjestelmän impulssivaste on

$$h(t)=e^{-at} \qquad (a\neq 0).$$

Määritä herätteen

$$x(t)=t$$

vaste $y(t)$.

<u>Ratkaisu:</u> Järjestelmän vaste

$$y(t)=(h*x)(t)=\int_0^t h(t-u)x(u)du=\int_0^t e^{-a(t-u)}udu=e^{-at}\int_0^t e^{au}udu.$$

Lasketaan integraali osittaisintegroinnilla. Valitaan

$$\begin{cases} f'(u)=e^{au} \\ g(u)=u \end{cases}, \text{jolloin} \begin{cases} f(u)=\frac{1}{a}e^{au} \\ g'(u)=1 \end{cases}.$$

Siis

$$\int_0^t e^{au}udu=\Big|_0^t \frac{1}{a}e^{au}u-\int_0^t \frac{1}{a}e^{au}du=\frac{1}{a}e^{at}t-\Big|_0^t \frac{1}{a^2}e^{au}=\frac{1}{a}te^{at}-\frac{1}{a^2}e^{at}+\frac{1}{a^2}$$

ja vaste on

$$y(t)=e^{-at}\left(\frac{1}{a}ta^{at}-\frac{1}{a^2}e^{at}+\frac{1}{a^2}\right)=-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}t+\frac{1}{a^2}e^{-at}$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1.7:

1. Lineaarisen järjestelmän impulssivaste on $h(t)=e^{-3t}$. Määritä järjestelmän vaste, kun heräte on

a) $x(t)=u(t)$ b) $x(t)=\sin(t)$.

1.7.3 Siirtofunktio

Lineaarisen aikainvariantin järjestelmän **siirtofunktiolla** tarkoitetaan *impulssivasteen Laplace-muunnosta*. Jos järjestelmän impulssivastetta merkitään $h(t)$, on siirtofunktio siis

$$H(s)=L[h(t)].$$

Olkoon nyt järjestelmän heräte $x(t)$ ja vaste $y(t)$ ja näiden Laplace-muunnokset vastaavasti $X(s)$ ja $Y(s)$. Vaste voidaan esittää impulssivasteen ja herätteen konvoluutiona

$$y(t)=(h*x)(t).$$

Ottamalla tästä Laplace-muunnos saadaan

$$Y(s)=H(s)X(s).$$

Siis siirtofunktio on

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

eli *siirtofunktio on järjestelmän vasteen ja herätteen Laplace-muunnosten osamäärä.*

Kun järjestelmän siirtofunktio tunnetaan, niin *vasteen Laplace-muunnos voidaan laskea kertolaskulla*

$$Y(s)=H(s)X(s).$$

Siirtofunktio sisältää tiiviissä muodossa informaation järjestelmän ominaisuuksista. Järjestelmän käyttäytymistä voidaankin analysoida tutkimalla järjestelmän siirtofunktiota.

ESIMERKKEJÄ

1. **Toisen kertaluvun järjestelmän siirtofunktio.** Johdetaan kappaleen 1.7.1 esimerkin 1 toisen kertaluvun järjestelmän

$$a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_0x(t)\quad \begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases},$$

siirtofunktio:

Laplace-muunnetaan differentiaaliyhtälö:

$$a_2s^2Y(s)+a_1sY(s)+a_0Y(s)=b_0X(s).$$

Ratkaistaan $Y(s)$:

$$Y(s)=\frac{b_0X(s)}{a_2s^2+a_1s+a_0}.$$

Siis järjestelmän siirtofunktio on

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{b_0}{a_2s^2+a_1s+a_0}$$

2. Lineaarisen järjestelmän impulssivaste on

$$h(t)=e^{-at}\quad (a\neq 0).$$

Määritä herätteen

$$v(t)=t$$

vaste $y(t)$.

<u>Ratkaisu:</u> Kappaleen 1.7.2 esimerkissä 1 tehtävä ratkaistiin konvoluutiota käyttäen. Ratkaistaan nyt tehtävä siirtofunktiota käyttäen.

Järjestelmän siirtofunktio on

$$H(s)=L\left[e^{-at}\right]=\frac{1}{s+a}.$$

Herätteen Laplace-muunnos on

$$V(s)=L[t]=\frac{1}{s^2}.$$

Siten vasteen Laplace-muunnos on

$$Y(s) = H(s)V(s) = \frac{1}{s+a}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2(s+a)}$$

Tämän osamurtokehitelmä on (johda tämä!)

$$Y(s) = -\frac{1}{a^2}\frac{1}{s} + \frac{1}{a}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{a^2}\frac{1}{s+a}.$$

Käänteismuuntamalla saadaan vaste

$$y(t) = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}t + \frac{1}{a^2}e^{-at}.$$

3. Tarkastellaan puhdasta *viivettä*, jossa viive on $t_0 \geq 0$. Oletetaan, että herätteelle $x(t)$ pätee: $x(t) = 0$, kun $t < 0$. Tällöin vaste

$$x_d(t) = u(t-t_0)x(t-t_0),$$

missä $u(t)$ on yksikköaskel.

Säännön S5 mukaan vasteen Laplace-muunnos on

$$X_d(s) = e^{-t_0 s}X(s).$$

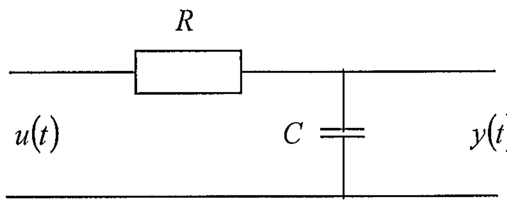
Viiveen siirtofunktio on siten

$$G(s) = \frac{X_d(s)}{X(s)} = e^{-t_0 s}.$$

Tämä on tietenkin impulssivasteen (kappaleen 1.7.1 esimerkki 3) Laplace-muunnos

$$L[\delta(t-t_0)] = e^{-t_0 s}$$

4. Tarkastellaan kuvan *alipäästösuodatinta.*



Järjestelmän herätteenä on jännite $u(t)$ ja vasteena jännite $y(t)$. Järjestelmä on lineaarinen, jos kondensaattorin alkujännite on nolla eli $y(0) = 0$.

Suoritetaan tarkastelu s-tasossa. Olkoon kondensaattorin läpi kulkeva virran L-muunnos $I(s)$ Tällöin

$$Y(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$$

ja

$$U(s) = RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = \left(R + \frac{1}{Cs} \right) I(s)$$

Täten

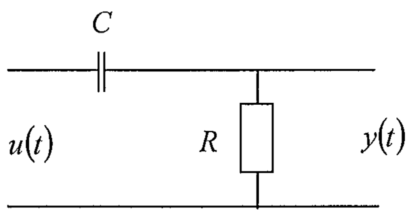
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{Cs} I(s)}{\left(R + \frac{1}{Cs} \right) I(s)} = \frac{1}{1 + RCs}.$$

Siis *alipäästösuodattimen siirtofunktio* on

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1.7:

2. Määritä kuvan piirin siirtofunktio. Piirissä herätteenä on jännite $u(t)$ ja vasteena jännite $y(t)$.



3. Lineaarisen järjestelmän siirtofunktio on

   a) $G(s) = \frac{1}{s^2}$ b) $G(s) = \frac{3s + 8}{s^2 + 5s + 6}$

   c) $G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$

   Määritä impulssivaste.

4. Lineaarisen järjestelmän siirtofunktio on

   $$H(s) = \frac{1}{s + 2}.$$

   Määritä järjestelmän vaste, kun heräte on

   a) $x(t) = u(t)$ b) $x(t) = u(t - 3)$.

5. Lineaarisen järjestelmän impulssivaste on $h(t) = e^{-3t}$. Määritä järjestelmän vaste, kun heräte on

   a) $x(t) = u(t)$ b) $x(t) = \sin(t)$.

   Käytä vasteen määritämisessä siirtofunktiota (vrt. tehtävä 1.7: 1).

1.7.4 Stabiilisuus

Järjestelmien stabiilisuus on tärkeä ja usein välttämätön ominaisuus. Epästabiili järjestelmä ajautuu nimittäin helposti lineaarisen toiminta-alueen ulkopuolella, jolloin järjestelmän käyttäytyminen ei ole hallinnassa. Stabiilisuus määritellään seuraavasti:

Lineaarinen järjestelmä on **stabiili**, jos rajoitetun herätteen vaste on rajoitettu.

Esitetään joitain stabiilisuuteen liittyviä tuloksia.

Lineaarinen aikainvariantti järjestelmä on stabiili, jos impulssivasteelle $h(t)$ pätee

$$\int_0^\infty |h(t)|dt < \infty .$$

Perustelu: Merkitään $S = \int_0^\infty |h(t)|dt < \infty$. Olkoon heräte $x(t)$ rajoitettu: $|x(t)| \leq M$ kaikilla t. Tällöin vaste $y(t)$ voidaan esittää konvoluutiona (ks. kappale 1.7.2)

$$y(t) = (h * x)(t) = \int_0^\infty h(u)x(t-u)du .$$

Viemällä itseisarvot integraalimerkin sisälle saadaan arvio

$$|y(t)| \leq \int_0^t |h(u)||x(t-u)|du \leq M \int_0^\infty h(u)du = MS < \infty .$$

Siis vaste on rajoitettu. Koska mielivaltaisen rajoitetun herätteen vaste on rajoitettu, on järjestelmä stabiili.

Jos lineaarisen järjestelmän siirtofunktio on rationaalifunktio, niin järjestelmä on stabiili, jos ja vain jos siirtofunktion *napojen reaaliosat ovat negatiiviset* eli *navat sijaitsevat negatiivisessa puolitasossa.*

Tarkkaa perustelua tälle tulokselle ei esitetä. Esitetään kuitenkin todistuksen idea.

Siirtofunktion osamurtokehitelmä koostuu seuraavaa muotoa olevien termien summasta:

1. $\dfrac{A}{(s-a)^n}$
2. $\dfrac{As+B}{(s^2+as+b)^n}$, missä polynomin s^2+as+b nollakohdat ovat $s_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Muodon 1 käänteismuunnos on muotoa

$$A't^{n-1}e^{at} .$$

Tämä pysyy rajoitettuna kun t kasvaa rajatta, jos $a < 0$.

Muodon 2 käänteismuunnos on muotoa

$$(A'\cos\beta t + B'\sin\beta t)t^{n-1}e^{\alpha t} .$$

Tämä pysyy rajoitettuna kun t kasvaa rajatta, jos $\alpha < 0$.

Siis siirtofunktion käänteismuunnos eli impulssivaste on rajoitettu, jos siirtofunktion napojen reaaliosat ovat negatiivisia. Tämä merkitsee, että järjestelmä on stabiili.

ESIMERKKEJÄ

1. Lineaarisen järjestelmän siirtofunktio on

$$H(s)=\frac{3s+1}{s^2+5s+8}.$$

Selvitä järjestelmän stabiilisuus.

Ratkaisu: Järjestelmän navat ovat siirtofunktion nimittäjän nollakohdat

$$s^2+5s+8=0 \Leftrightarrow s_{1,2}=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i.$$

Koska nollakohtien reaaliosat ovat negatiivisia, on järjestelmä stabiili.

HARJOITUSTEHTÄVÄT 1.7:

6. Lineaarisen järjestelmän siirtofunktio on

a) $G(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$ b) $G(s)=\dfrac{3s+8}{s^2+5s+6}$

c) $G(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$

Selvitä järjestelmän stabiilisuus.

1.8 Dynaaminen lineaarinen järjestelmä

1.8.1 Tilaesitys

Tarkastellaan säätötekniikassa esiintyvää *monimuuttujajärjestelmää*, jossa heräte ja vaste voivat olla vektoreita. Merkintä $\mathbf{R}^n$ tarkoittaa n-pystyvektoreiden

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

joukkoa.

Jatkuvan aikainvariantin lineaariseen järjestelmän **tilaesitys** on

$$\begin{cases}x'(t)=Ax(t)+Bu(t)\\y(t)=Cx(t)+Du(t)\end{cases}, \qquad (*)$$

missä

- $x(t)\in\mathbf{R}^n$ on järjestelmän **tila**
- $u(t)\in\mathbf{R}^m$ on **heräte**
- $y(t)\in\mathbf{R}^r$ on **vaste.**

Yllä vakiot A, B, C ja D ovat matriiseja, joista A on *neliömatriisi.*

Tilaesityksessä

- differentiaaliyhtälö

$$x'(t)=Ax(t)+Bu(t) \qquad (**)$$

kuvaa järjestelmän *sisäistä dynamiikkaa.*

- vastefunktio

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

kuvaa vasteen $y(t)$ riippuvuutta tilasta $x(t)$ ja herätteestä $u(t)$.

Yhtälön (*) mukainen lineaarinen järjestelmä on kappaleen 1.7.1 mielessä lineaarinen, jos differentiaaliyhtälön (**) alkutila on nolla: $x(0) = \mathbf{0}$

ESIMERKKEJÄ

1. **Toisen kertaluvun järjestelmän tilaesitys**[23]**.**

Tarkastellaan *2. kertaluvun mallia*

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t),$$

missä $u(t)$ on järjestelmän heräte, $y(t)$ on järjestelmän vaste ja kertoimet a_0, a_1, b_0 ovat vakioita. (vrt. kappaleen 17.1 esimerkkiin 1; tässä kerroin $a_2 = 1$).

Tilaesitys muodostetaan muuntamalla differentiaaliyhtälö *normaaliryhmäksi*:

a. Ratkaistaan korkein derivaatta:

$$y'' = -a_1 y' - a_0 y + b_0 u$$

b. Määritellään kaksi funktiota (kertaluku 2)

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases}$$

c. Tällöin

$$\begin{cases} x_1' = y' = x_2 \\ x_2' = y'' = -a_1 y' - a_0 y + b_0 u = -a_1 x_2 - a_0 x_1 + b_0 u \end{cases}$$

josta saadaan normaaliryhmä

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -a_1 x_2 - a_0 x_1 + b_0 u \end{cases}$$

Edellä oleva normaaliyhtälö voidaan kirjoittaa tilaesityksenä seuraavasti:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Siten järjestelmän tilaesityksen matriisit ovat

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0].$$

2. **Differentiaaliyhtälöryhmän tilaesitys.**

[23] Menettelytapa yleistyy korkeampikertalukuisiin vakiokertoimisiin differentiaaliyhtälöihin.

Differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + 3x_2 + u_1 - u_2 \\ x_2' = 3x_2 - 5x_1 + 2u_2 \end{cases}$$

voidaan esittää matriisimuodossa seuraavasti:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Jos järjestelmän ulostulo on

$$y = x_1 + x_2 + u_2,$$

niin vastefunktio on

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Järjestelmän tilaesityksen matriisit ovat tällöin

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.8.2 Siirtofunktioesitys

Tilaesityksessä esiintyy vektoriarvoisia funktioita. Vektoriarvoisten funktioiden Laplace-muunnokset lasketaan koordinaateittain. Esimerkiksi funktion

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

Laplace-muunnos on funktio

$$\boldsymbol{F}(s) = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix}.$$

Vektoriarvoisten funktioiden Laplace-muunnossäännöt ovat samanlaisia kuin skalaarifunktioiden muunnossäännöt. Ne seuraavat suoraan vastaavista skalaarisista muunnossäännöistä.

Esimerkiksi *derivaatan Laplace-muunnos*

$$\boldsymbol{f}'(t) = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} sF_1(s) - f_1(0+) \\ sF_2(s) - f_2(0+) \\ \vdots \\ sF_n(s) - f_n(0+) \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1(0+) \\ f_2(0+) \\ \vdots \\ f_n(0+) \end{bmatrix} = s\boldsymbol{F}(s) - \boldsymbol{f}(0+)$$

Johdetaan nyt tilaesityksen

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases},$$

siirtofunktio, kun alkutila

$$x(0) = \mathbf{0}.$$

Laplace-muuntamalla differentiaaliyhtälö, saadaan

$$sX(s) = AX(s) + BU(s).$$

Tämä voidaan kirjoittaa muotoon (I on yksikkömatriisi)

$$(sI - A)X(s) = BU(s),$$

josta tilan Laplace-muunnos voidaan ratkaista

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s).$$

Koska vastefunktion Laplace-muunnos on

$$Y(s) = CX(s) + DU(s),$$

saadaan

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s) = \left(C(sI - A)^{-1} B + D\right)U(s).$$

Siis järjestelmän siirtofunktiolle saadaan esitys

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D, \qquad (*)$$

koska tällöin

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

Esitystä (*) sanotaan järjestelmän **siirtofunktioesitykseksi.**

Siirtofunktio on $r \times m$-matriisi, jonka alkiot ovat rationaalifunktioita. Koska

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \operatorname{adj}(sI - A).$$

on siirtofunktion alkioiden

- osoittajan aste on pienempi kuin nimittäjän aste, jos matriisi $D = 0$
- osoittajan aste on pienempi tai yhtä suuri kuin nimittäjän aste, jos matriisi $D \neq 0$

ESIMERKKEJÄ

1. Muodostetaan kappaleen 1.8.1 esimerkin 1 järjestelmän siirtofunktioesitys (vrt. kappaleen 1.7.3 esimerkkiin 1; tässä kerroin $a_2 = 1$).

   Tilaesityksen matriisit ovat

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0].$$

   Tällöin

   $$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ a_0 & s + a_1 \end{bmatrix}$$

   ja

$$\det(sI - A) = s^2 + a_1 s + a_0 .$$

Siten

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \operatorname{adj}(sI - A)$$

$$= \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \begin{bmatrix} s + a_1 & 1 \\ -a_0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s + a_1}{s^2 + a_1 s + a_0} & \dfrac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \\ \dfrac{-a_0}{s^2 + a_1 s + a_0} & \dfrac{s}{s^2 + a_1 s + a_0} \end{bmatrix}$$

ja järjestelmän siirtofunktio on

$$C(sI - A)^{-1} B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s + a_1}{s^2 + a_1 s + a_0} & \dfrac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \\ \dfrac{-a_0}{s^2 + a_1 s + a_0} & \dfrac{s}{s^2 + a_1 s + a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

2. Muodostetaan kappaleen 1.8.1 esimerkin 2 järjestelmän siirtofunktioesitys. Tilaesityksen matriisit ovat

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt

$$sI - A = \begin{bmatrix} s + 2 & -3 \\ -3 & s + 5 \end{bmatrix}$$

ja

$$\det(sI - A) = s^2 + 7s + 1 .$$

Siten

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \operatorname{adj}(sI - A) =$$

$$\frac{1}{s^2 + 7s + 1} \begin{bmatrix} s + 5 & 3 \\ 3 & s + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s + 5}{s^2 + 7s + 1} & \dfrac{3}{s^2 + 7s + 1} \\ \dfrac{3}{s^2 + 7s + 1} & \dfrac{s + 2}{s^2 + 7s + 1} \end{bmatrix}$$

ja järjestelmän siirtofunktio on

$$C(sI - A)^{-1} B + D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s + 5}{s^2 + 7s + 1} & \dfrac{3}{s^2 + 7s + 1} \\ \dfrac{3}{s^2 + 7s + 1} & \dfrac{s + 2}{s^2 + 7s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+8}{s^2+7s+1} & \frac{s^2+8s+3}{s^2+7s+1} \end{bmatrix}.$$

1.8.3 Stabiilisuus

Kappaleen 1.7.4 mukaan tilaesityksenä annettu järjestelmä

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases},$$

on stabiili, jos järjestelmän siirtofunktion

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

napojen reaaliosat ovat negatiiviset. Käänteismatriisi $(sI - A)^{-1}$ on muotoa

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \operatorname{adj}(sI - A).$$

Tästä voidaan päätellä, että järjestelmä on stabiili, jos matriisin A karakteristisen yhtälön

$$\det(sI - A) = 0$$

juurien reaaliosat ovat negatiiviset eli kun *matriisin A ominaisarvojen reaaliosat ovat negatiiviset*. Tällöin rajoitetulla herätteellä tila pysyy rajoitettuna.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään kappaleen 1.8.1 esimerkin 2 järjestelmän stabiilisuus.

   Matriisi A on

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

   Tämän ominaisarvot ovat karakteristisen yhtälön

$$\det(sI - A) = 0$$
$$\Leftrightarrow s^2 + 7s + 1 = 0$$

   juuret

$$s_1 = -0{,}145898...$$
$$s_2 = -6{,}8541...$$

   Nämä ovat negatiivisia lukuja, joten järjestelmä on stabiili.

2. DISKREETIT JÄRJESTELMÄT JA Z-MUUNNOKSET

2.1 Diskreetti järjestelmä

2.1.1 Lukujono

Diskreetit järjestelmät käsittelevät lukujonoja. Aluksi esitetäänkin joitain lukujonoihin liittyviä käsitteitä.

Lukujono x on jono lukuja, jotka on *indeksoitu kokonaisluvuilla*. Indeksijoukko voi olla kaikki kokonaisluvut tai kokonaislukujen osaväli. Lukujonon n:ttä alkiota merkitään $x(n)$ tai x_n. Usein koko lukujonoa merkitään lyhyesti $x(n)$. Merkinnässä $(x(n))_{n=N_1}^{N_2}$ ilmoitetaan indeksijoukon ala-raja N_1 ja yläraja N_2.

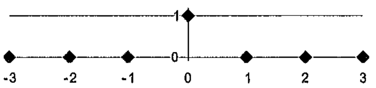
ESIMERKKEJÄ

1. Lukujono $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ koostuu luvuista $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$

   Lukujono $\left((-1)^n n\right)_{n=0}^{\infty}$ koostuu luvuista $0, -1, 2, -3, 4, \ldots$

Yksikkönäytteellä eli yksikkönäytejonolle tarkoitetaan lukujonoa

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, \text{kun } n = 0 \\ 0, \text{kun } n \neq 0 \end{cases}.$$

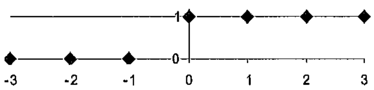


Jokainen lukujono $x(n)$ voidaan esittää yksikkönäytteiden avulla muodossa (tarkista asia!)

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(k-n) \qquad (*)$$

Yksikköaskeleella tarkoitetaan lukujonoa

$$u(n) = \begin{cases} 1, \text{kun } n \geq 0 \\ 0, \text{kun } n < 0 \end{cases}$$

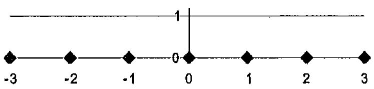


Yksikkönäytejono $\delta(n)$ voidaan lausua yksikköaskeleen avulla seuraavasti:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

Nollajonolla tarkoitetaan lukujonoa, jonka kaikki alkiot ovat nollia:

$$\underline{0}(n) = 0 \quad \text{kaikilla } n.$$



Lukujonoilla voidaan laskea samaan tapaan kuin koordinaattivektoreilla. Peruslaskutoimitukset ovat seuraavat:

- Kahden lukujonon **summa** $x + y$ on lukujono z, missä $z(n) = x(n) + y(n)$ kaikilla n.

- **Vakion** a **ja lukujonon tulo** $a \cdot x$ on lukujono z, missä $z(n) = ax(n)$ kaikilla n.
- Kahden lukujonon **tulo** $x \cdot y$ on lukujono z, missä $z(n) = x(n) \cdot y(n)$ kaikilla n.

Lukujonoille voidaan määritellä konvoluutiotulo, joka on tärkeämpi kuin edellä esitetty alkioittainen tulo:

Lukujonojen x ja y **konvoluutiolla** $x * y$ tarkoitetaan lukujonoa, jonka n:s alkio on

$$\boxed{(x * y)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) y(n-k)}$$

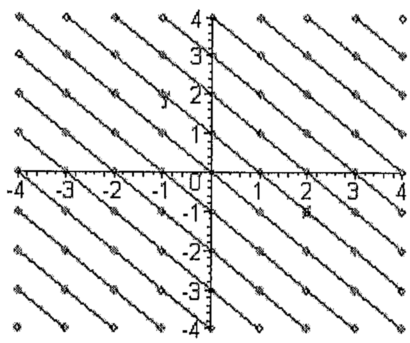
Konvoluutio voidaan esittää myös seuraavasti:

$$(x * y)(n) = \sum_{i+j=n} x(i) y(j). \qquad (**)$$

Edellä summeerataan yli kaikkien kokonaislukujen i ja j, joille

$$i + j = n.$$

Nämä ovat ij-tasossa viereisen kuvan vinoja suoria.



Käyttämällä kaavaa (*) havaitaan, että

$$x = x * \delta$$

Tämän mukaan *yksikkönäyte on konvoluutiotulon yksikköalkio.*

Konvoluutiolla on monet tavanomaiset tulon ominaisuudet:

- *vaihdantalaki*:
$$x * y = y * x$$
- *liitäntälaki*:
$$(x * y) * z = x * (y * z),$$
- *osittelulaki*:
$$x * (y + z) = x * y + x * z$$

Perustellaan nämä:

<u>Vaihdantalaki</u> seuraa heti yhtälöstä (**).

<u>Liitäntälaki:</u> Yhtälöä (**) käyttäen saadaan

$$((x * y) * z)(n) = \sum_{l+k=n} (x * y)(l) z(k) = \sum_{l+k=n} \left(\sum_{i+j=l} x(i) y(j) \right) z(k) = \sum_{i+j+k=n} x(i) y(j) z(k)$$

$$= \sum_{i+l=n} x(i) \left(\sum_{j+k=l} y(j) z(k) \right) = \sum_{i+l=n} x(i) (y * z)(l) = (x * (y * z))(n)$$

josta liitäntälaki seuraa.

<u>Osittelulaki:</u> Harjoitustehtävä.

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2.1:

1. Totea, että kaava $x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(k-n)$ pätee.
2. Todista konvoluution osittelulaki.

2.1.2 Diskreetti järjestelmä

Teknisissä järjestelmissä käsiteltävät signaalit jaetaan usein kahteen luokkaan:

- **analogisella signaalilla** tarkoitetaan signaalia, joka saa arvoja *kaikilla ajanhetkillä.*
- **diskreetillä signaalilla** tarkoitetaan signaalia, joka saa arvoja *tietyn aika-askelen välein.*

Yleisesti järjestelmät luokitellaan vastaavasti[24]

- **analogisiin järjestelmiin**, joissa käsitellään analogisia signaaleja.
- **diskreetteihin järjestelmiin**, joissa käsitellään diskreettejä signaaleja.

Diskreettejä signaaleja syntyy esimerkiksi, kun analogisia signaaleja *diskretoidaan*: otetaan analogisesta signaalista näytteitä tietyin aikavälein.

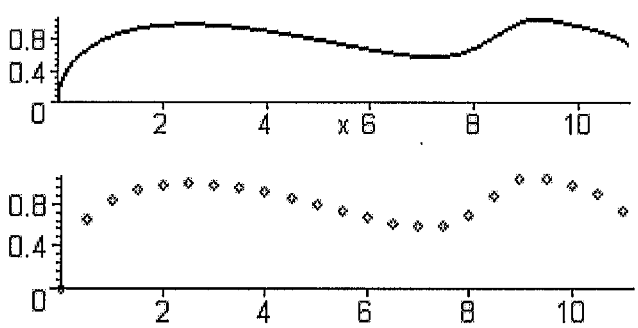
Olkoon

$$x_a(t), \quad t \in \mathbf{R}$$

analoginen signaali, josta otetaan näytteitä aika-askeleen T välein. Tällöin syntyy diskreetti signaali

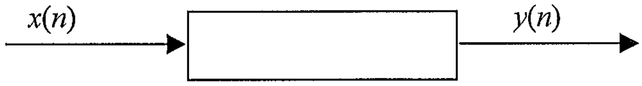
$$x(n)=x_a(nT), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Signaali x on lukujono. Diskreetti signaali esitetäänkin matemaattisesti *lukujonona.*



Järjestelmällä tarkoitetaan sähköistä tai mekaanista laitetta tai systeemiä, jolla on tietty *sisäänmenosignaali (input)* ja tietty *ulostulosignaali (output).* Järjestelmä kuvataan usein *mustana laatikkona.* (vrt. kappale 1.7.1)

[24] On olemassa myös *sekajärjestelmiä,* joissa osa on analogista ja osa diskreettiä.



Diskreetillä järjestelmällä tarkoitetaan *sääntöä*, joka kuvaa sisäänmenojonon[25] $x(n)$ ulostulojonoksi $y(n)$. Jos tätä sääntöä merkitään kirjaimella P, voidaan tämä esittää seuraavasti:

$$y = P(x).$$

Sisäänmenosignaalia sanotaan **herätteeksi** ja ulostulosignaalia **vasteeksi**. Vasteen alkio $y(n)$ riippuu yleensä *koko herätteestä* x, eikä pelkästään alkiosta $x(n)$.

ESIMERKKEJÄ

1. **Puhdas viive.** Puhdas viive on järjestelmä, jossa signaaleja viivästetään arvon k verran: Herätteen x vaste x_d määräytyy seuraavasti:

$$x_d(n) = x(n-k).$$

2. **Liukuva keskiarvo.** Liukuvassa keskiarvossa vaste on herätejonon liukuva keskiarvo. Jos heräte on x, niin vaste on

$$y(n) = \frac{1}{m_1 + m_2 + 1} \sum_{k=-m_1}^{m_2} x(n+k)$$

Muistittomassa järjestelmässä vasteen alkio $y(n)$ riippuu vain herätteen alkiosta $x(n)$.

ESIMERKKEJÄ

3. Järjestelmä, jossa herätteen x vaste y määräytyy seuraavasti:

$$y(n) = x(n)^2$$

on muistiton järjestelmä.

Järjestelmä on **kausaalinen**, jos vasteen alkio $y(n)$ riippuu vain herätteen arvoista $x(k)$, $k \le n$. Käytännössä tämä merkitsee sitä, että järjestelmä ei reagoi ennen herätettä. Siten *kaikki fysikaaliset järjestelmät ovat kausaalisia.*

Esimerkkeinä olleista järjestelmistä

- Puhdas viive on kausaalinen, jos viive $k \ge 0$.
- Liukuva keskiarvo on kausaalinen, jos $m_1 \ge 0$ ja $m_2 \le 0$.

Järjestelmää sanotaan **aikainvariantiksi**, jos herätteen viive aiheuttaa saman viiveen vasteeseen:

$$\text{jos } y(n) = P[x(n)], \text{ niin } y(n-k) = P[x(n-k)]$$

kaikilla luvuilla k.

Kaikki edellisissä esimerkeissä esitetyt järjestelmät ovat aikainvariantteja. (Tarkista asia!)

[25] Sisäänmenosignaaleja ja ulostulosignaaleja voi olla enemmänkin kuin yksi. Seuraavassa tarkastellaan pääasiassa **skalaarijärjestelmiä**, joissa sisäänmenojen ja ulostulojen lukumäärä on yksi.

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2.1:

3. Osoita, että puhdas viive on aikainvariantti järjestelmä.
4. Osoita, että liukuva keskiarvo on aikainvariantti järjestelmä.
5. Esitä esimerkki järjestelmästä, joka ei ole aikainvariantti.

2.1.3 Lineaarinen aikainvariantti järjestelmä

Järjestelmä on **lineaarinen**, jos vaste riippuu lineaarisesti herätteestä (vrt. kappale 1.7.1)

$$P(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 P(x_1) + \lambda_2 P(x_2)$$

kaikille herätteille x_1 ja x_2, missä λ_1 ja λ_2 ovat vakioita. Tämä voidaan yleistää mielivaltaisille summille

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(x_k),$$

missä $x_1, \ldots, x_n$ ovat herätteitä ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ovat vakioita.

Erityisesti lineaarisille järjestelmille **nollaherätteen vaste on nolla**:

$$P(\underline{0}) = \underline{0}$$

Kappaleen 2.1.2 esimerkkien 1 ja 2 järjestelmät ovat lineaarisia; esimerkin 3 on järjestelmä epälineaarinen (Totea nämä!).

Lineaarista aikainvarianttia järjestelmää sanotaan lyhyesti **LTI-järjestelmäksi.** Nimitys tulee englannin kielen sanoista *linear time-invariant.* Tehdään seuraava oletus:

Tästä lähtien tarkastellaan vain LTI-järjestelmiä.

Järjestelmän **impulssivasteella** h tarkoitetaan *yksikkönäytejonon vastetta*:

$$h = P[\delta].$$

Lyhyesti tämä voidaan merkitä myös seuraavasti:

$$h(n) = P[\delta(n)]$$

Aikainvariantille järjestelmälle

$$h(n-k) = P[\delta(n-k)]$$

jokaisella k.

Määritetään nyt herätteen

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

vaste

$$y(n) = P\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

Käyttämällä järjestelmän lineaarisuutta ja aikainvarianssia hyväksi saadaan

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)P[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$

Tämä voidaan esittää konvoluutiona:

$$y = x * h = h * x.$$

Saatiin seuraava tulos:

LTI-järjestelmän vaste y on impulssivasteen h ja herätteen x konvoluutio

$$y = h * x$$

LTI-järjestelmän vaste voidaan siis määrittää, kun tiedetään impulssivaste. Täten impulssivaste kaiken sisältää kaiken tiedon järjestelmästä.

Jos LTI-järjestelmä on kausaalinen, niin herätteen x vaste

$$y(n) = (h * x)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

ei riipu arvoista $x(n-k)$, kun $k < 0$. Siten kertoimen $h(k)$ on oltava nolla, kun $k < 0$. Saadaan seuraava ehto järjestelmän kausaalisuudelle:

LTI-järjestelmä on kausaalinen, jos ja vain jos impulssivasteelle h pätee $h(n) = 0$, kun $n < 0$.

Yleisesti lukujonoa $x(n)$ sanotaan **kausaaliseksi**, jos $x(n) = 0$, kun $n < 0$. Kausaalinen lukujono voisi siis olla kausaalisen järjestelmän impulssivaste.

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2.1:

6. Osoita, että lineaarisilla järjestelmillä nollaherätteen vaste on nolla.
7. Osoita, että puhdas viive on lineaarinen järjestelmä.
8. Osoita, että liukuva keskiarvo on lineaarinen järjestelmä.
9. Osoita, että järjestelmä $y(n) = x(n)^2$ ei ole lineaarinen.
10. Määritä puhtaan viiveen impulssivaste.
11. Määritä liukuvan keskiarvon järjestelmän

$$y(n) = \frac{1}{m_2 - m_1 + 1}\sum_{k=m_1}^{m_2} x(n+k),$$

missä $m_1 < m_2$, impulssivaste.

2.1.4 Stabiilisuus

Stabiilisuus on tärkeä ja usein välttämätön järjestelmän ominaisuus. Järjestelmän stabiilisuus voidaan määritellään seuraavasti:

Lineaarinen järjestelmä on **stabiili**, jos rajoitetun herätteen vaste on rajoitettu.

LTI-järjestelmän stabiilisuus voidaan selvittää impulssivasteen avulla:

Stabiilisuusehto: LTI-järjestelmä on stabiili, jos ja vain jos impulssivasteelle h pätee

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Todistetaan tämä tulos kahdessa vaiheessa:

$\Rightarrow$ Oletetaan, että $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$. Osoitetaan, että järjestelmä on stabiili.

Olkoon heräte rajoitettu: $|x(n)| \leq M$ kaikilla n. Tällöin vasteelle pätee

$$|y(n)| = |(h * x)(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = MS < \infty .$$

Siis vaste on rajoitettu. Koska mielivaltaisen rajoitetun herätteen vaste on rajoitettu, on järjestelmä stabiili.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että järjestelmä on stabiili. Osoitetaan, että summa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$.

Valitaan herätteeksi seuraava rajoitettu (miksi rajoitettu?) jono:

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{h(-n)}{|h(-n)|}, \text{kun } h(-n) \neq 0 \\ 1, \text{kun } h(-n) = 0 \end{cases} .$$

Määritetään vaste indeksin arvolla 0.

$$y(0) = (h * x)(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h(k)^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

Koska järjestelmä on stabiili on tämä äärellinen. Siis summa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$.

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2.1:

12. Onko puhdas viive stabiili järjestelmä?
13. Onko liukuva keskiarvo stabiili järjestelmä?

2.2 Differenssiyhtälöt

2.2.1 Perusmääritelmiä

Lineaarinen vakiokertoiminen kertalukua N oleva differenssiyhtälö on muotoa

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n+k) = w(n) \qquad (*)$$

oleva yhtälö, missä

- luvut $a_0, a_1, \ldots, a_N$ ovat vakioita, $a_N \neq 0$

- $w(n)$ on annettu lukujono.

Lukujono $y(n)$ on differenssiyhtälön **ratkaisu**, jos se toteuttaa differenssiyhtälön kaikilla[26] $n = 0, 1, 2, \ldots$. Voidaan olettaa, että lukujonon $w(n)$ alkioille pätee: $w(n) = 0$, kun $n < 0$.

Arvoilla $N = 1$ ja $N = 2$ saadaan tästä vastaavasti

- 1. kertaluvun differenssiyhtälö

$$a_1 y(n+1) + a_0 y(n) = w(n)$$

- 2. kertaluvun differenssiyhtälö

$$a_2 y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_0 y(n) = w(n)$$

Kirjoitetaan yhtälö (*) muotoon

$$y(n+N) = -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y(n+k) + \frac{w(n)}{a_N}, \qquad (**)$$

jossa $y(n+N)$ on lausuttu arvojen

$$y(n), y(n+1), \ldots, y(n+N-1)$$

avulla.

Tästä nähdään, että jos y:n arvoille $y(0), y(1), \ldots, y(N-1)$ on annettu mielivaltaiset arvot voidaan yhtälöstä (**) *rekursiivisesti* laskea ratkaisun arvot indeksistä N eteenpäin

$$y(N), y(N+1), y(N+2), \ldots$$

Siten differenssiyhtälön **alkuarvoprobleemalla**, jossa on määritettävä se ratkaisu, joka toteuttaa **alkuehdot**

$$y(0) = y_0, \; y(1) = y_1, \ldots, y(N-1) = y_{N-1}$$

on *yksikäsitteinen ratkaisu.*

ESIMERKKEJÄ

1. Eräs pöllölaji lisääntyy 2% vuodessa. Jos $x(n)$ on pöllöjen määrä n:n vuoden päästä, niin

$$x(n+1) = x(n) + 0{,}02x(n) = 1{,}02x(n).$$

Lukujono $x(n)$ toteuttaa siis seuraavan *differenssiyhtälön* ($n \geq 0$)

$$x(n+1) = 1{,}02x(n).$$

Jotta $x(1)$ olisi määritelty on tiedettävä $x(0)$ eli pöllöjen määrä alkuhetkellä.

Tässä tapauksessa on helppo määrittää yleinen kaava, jolla $x(n)$ voidaan laskea.

2. **Differentiaaliyhtälön diskretointi ja differenssiyhtälöt.**

Analogiset prosessit mallinnetaan usein differentiaaliyhtälöiden avulla. Tällaiset mallit on diskretoitava, kun niitä halutaan käsitellä osana diskreettiä järjestelmää. Kun differentiaaliyhtälö diskretoidaan, siitä syntyy *differenssiyhtälö.*

Tarkastellaan esimerkiksi differentiaaliyhtälöä

[26] Indeksijoukon alaraja voi olla muukin kuin nolla.

$$\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Tässä esiintyvä tuntematon funktio y diskretoidaan käyttäen diskretointiaskelta T seuraavasti: Määritellään lukujono y_k:

$$y_k = y(kT)$$

Derivaatta voidaan diskretoida erotusosamäärällä:

$$\frac{dy(kT)}{dt} \approx \frac{y(kT+T) - y(kT)}{T} = \frac{y_{k+1} - y_k}{T}$$

Päädytään seuraavaan differentiaaliyhtälön diskretointiin:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{T} + y_k = 0$$

Tästä saadaan sieventämällä differenssiyhtälö

$$y_{k+1} + (T-1)y_k = 0$$

3. **Fibonaccin[27] luvut** määritellään seuraavasti:
   - ensimmäinen luku on 1
   - toinen luku on 1
   - sen jälkeen luku on kahden edellisen summa.

Luvut liittyvät seuraavaan ongelmaan, jota Fibonacci tutki vuoden 1200 tienoilla:

Hedelmällinen jänispari sijoitetaan aitaukseen. Kuinka monta jänisparia on vuoden lopussa, jos jänisten lisääntyminen noudattaa seuraavia sääntöjä:

- Hedelmällinen jänispari tuottaa uuden jänisparin jokaisen kuukauden lopussa.
- Uusi pari tulee hedelmälliseksi yhdessä kuukaudessa.
- Yksikään jänis ei kuole.

Jos n:tta Fibonaccin lukua merkitään $f(n)$:lla, niin tämä voidaan ilmaista seuraavasti:

$$f(1) = 1$$
$$f(2) = 1$$
$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad (n \geq 3)$$

Tässä on kyseessä *differenssiyhtälö*, jossa on kaksi alkuehtoa. Fibonacci-luvut on määrätty *rekursiivisesti*: luku on lausuttu edellisten lukujen avulla.

Alkeellinen tapa laskea Fibonaccin lukuja on käyttää yo. määritelmää. Tällöin esim. luvun $f(1000)$ määrittämiseksi on ensin määrättävä kaikki edelliset 999 Fibonaccin lukua: $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(999)$.

Helpompi tapa laskea Fibonaccin lukuja on määrittää yleinen kaava, josta luvut saadaan. Tätä ei löydä aivan yhtä helposti kuin esimerkissä 1.

[27] **Leonardo Fibonacci** (n. 1180-1240), *Leonardo Pisalainen*, oli italialainen matemaatikko, jota voidaan pitää Euroopan ensimmäisenä matemaatikkona. Hän sai koulutuksensa Pohjois-Afrikassa. Fibonacci toi Eurooppaan arabialaiset numerot ja niihin liittyvän positiojärjestelmään perustuvan laskutavan.

Differenssiyhtälö voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$f(n+2)=f(n+1)+f(n) \qquad (n\geq 0).$$

Muuttamalla indeksointia voidaan alkuarvoprobleema lausua muodossa

$$f(0)=1$$
$$f(1)=1$$
$$f(n+2)=f(n+1)+f(n) \qquad (n\geq 0).$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2.2:

1. Määritä kaava, josta esimerkin 1 pöllöjen määrä voidaan yleisesti laskea.
2. Määritä Fibonaccin lukujonon 20 ensimmäistä alkiota.

2.2.2 Differenssiyhtälön ratkaiseminen

Tässä kappaleessa esitetään ratkaisumenetelmä, joka on saman tyyppinen kuin differentiaaliyhtälöiden ratkaisumenetelmä. Lineaaristen differenssiyhtälöiden teoria onkin monessa suhteessa samanlaista kuin lineaaristen differentiaaliyhtälöiden teoria. Lukijan kannattaa verrata seuraavassa esitettävää teoriaa differentiaaliyhtälöiden teoriaan ja etsiä näistä samankaltaisuuksia.

Oleellinen ero näiden välillä on seuraava:

- *Differentiaaliyhtälö* koskee jollain reaaliakselin välillä määriteltyjä funktioita. Sovelluksissa differentiaaliyhtälö liittyy ns. jatkuva-aikaisiin analogisiin järjestelmiin
- *Differenssiyhtälö* koskee lukujonoja eli kokonaislukupisteissä määriteltyjä funktiota. Sovelluksissa differenssiyhtälö liittyy diskreettiaikaisiin digitaalisiin järjestelmiin.

2.2.2.1 Käsitteistöä

Lineaarisen vakiokertoimisen kertalukua N olevan differenssiyhtälön

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n+k)=w(n)$$

termiä $w(n)$ sanotaan **epähomogeeniseksi termiksi**. Jos $w(n)=0$, sanotaan differenssiyhtälöä **homogeeniseksi**, muuten **täydelliseksi.**

Differenssiyhtälön **yleinen ratkaisu** sisältää N oleellista toisistaan riippumatonta parametria, joita yleensä merkitään C_1, C_2, ..., C_N. Kiinnittämällä parametreille arvot saadaan differenssiyhtälön **yksityisratkaisu.** Alkuarvoprobleeman ratkaisu ei sisällä määräämättömiä parametreja.

Homogeenisen ja vastaavan täydellisen yhtälön ratkaisuista voidaan todeta seuraavaa:

- *Homogeenisella* differenssiyhtälöllä on aina ns. **triviaaliratkaisu**

  $$x(n)=0 \qquad \forall n=0,1,2,\ldots$$

- Jos $x(n)$ ja $y(n)$ ovat *homogeenisen* yhtälön ratkaisuja, niin lineaarinen yhdelmä

  $$ax(n)+by(n),$$

  missä a ja b ovat lukuja, on myös homogeenisen yhtälön ratkaisu.

- Jos $y_1(n), y_2(n), \ldots, y_N(n)$ ovat homogeenisen yhtälön riippumattomia[28] ratkaisuja, niin
$$y(n) = C_1 y_1(n) + C_2 y_2(n) + \cdots + C_N y_N(n)$$
on **homogeenisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu.**
- Jos $y_I(n)$ on täydellisen yhtälön yksityisratkaisu ja $y_H(n)$ on vastaavan homogeenisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu, niin
$$y(n) = y_H(n) + y_I(n)$$
on **täydellisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu.**

ESIMERKKEJÄ

1. Homogeenisen yhtälön
$$x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = 0$$
yleinen ratkaisu on
$$x(n) = C_1 3^n + C_2(-2)^n$$
Asettamalla vaikkapa $C_1 = 2$, $C_2 = 1$ saadaan *yksityisratkaisu*
$$x(n) = 2 \cdot 3^n + (-2)^n$$

2. Alkuarvoprobleeman
$$x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = 0 \qquad \begin{cases} x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$
ratkaisu on
$$x(n) = \frac{1}{5} \cdot 3^n - \frac{1}{5} \cdot (-2)^n$$

2.2.2.2 <u>1. kertaluvun homogeeninen differenssiyhtälö</u>

1. kertaluvun vakiokertoiminen homogeeninen differenssiyhtälö on muotoa
$$ax(n+1) + bx(n) = 0 \qquad (*)$$
oleva yhtälö, missä a ja b ovat vakioita, $a \neq 0$.
Merkitsemällä
$$r = -\frac{b}{a}$$
voidaan tämä yhtälö kirjoittaa muotoon
$$x(n+1) = rx(n). \qquad (**)$$
Jos asetetaan
$$x(0) = C$$
saadaan yhtälöä (**) käyttäen

[28]Puutteellisten matematiikan tietojen takia tätä ei voida esittää täsmällisesti.

$$x(1) = rx(0) = Cr$$
$$x(2) = rx(1) = Cr^2$$
$$x(3) = rx(2) = Cr^3$$
$$\dots$$

Tästä nähdään, että **yleinen ratkaisu** on

$$x(n) = Cr^n,$$

kun $n = 0, 1, 2, \dots$ Yleisessä ratkaisussa esiintyvä luku r toteuttaa yhtälön

$$ar + b = 0.$$

Tätä yhtälöä sanotaan differenssiyhtälön (*) **karakteristiseksi yhtälöksi.**

ESIMERKKEJÄ

1. Ratkaistaan alkuarvoprobleema
$$2x(k+1) - 3x(k) = 0 \qquad x(0) = -4.$$
Karakteristinen yhtälö on
$$2r - 3 = 0.$$
Tämän ratkaisu on $r = \frac{3}{2}$, joten differenssiyhtälön yleinen ratkaisu on
$$x(k) = C\left(\frac{3}{2}\right)^k.$$
Alkuehdosta saadaan
$$C\left(\frac{3}{2}\right)^0 = -4 \Leftrightarrow C = -4$$
Siis alkuarvoprobleeman ratkaisu on
$$x(k) = -4\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2.2:

3. Etsi yleiset ratkaisut differenssiyhtälöille
a) $3x(n+1) - 4x(n) = 0$ b) $5x(n+1) + 4x(n) = 0$
4. Ratkaise alkuarvoprobleemat:
a) $3x(n+1) - 4x(n) = 0, \quad x(0) = 2$ b) $5x(n+1) + 4x(n) = 0, \quad x(0) = 5$

2.2.2.3 2. kertaluvun homogeeninen differenssiyhtälö

2. kertaluvun vakiokertoiminen homogeeninen differenssiyhtälö on muotoa

$$ax(n+2) + bx(n+1) + cx(n) = 0 \qquad (*)$$

oleva yhtälö, missä a, b ja c ovat reaalisia vakioita, $a \neq 0$.

Yritetään löytää samanlainen ratkaisu kuin 1. kertaluvun differenssiyhtälölle. Määrätään vakio r siten, että

$$x(n) = r^n$$

toteuttaa differenssiyhtälön (*). Sijoitetaan tämä differenssiyhtälöön (*):

$$ar^{n+2} + br^{n+1} + cr^n = 0 \Leftrightarrow r^n\left(ar^2 + br + c\right) = 0.$$

Tästä nähdään, että $x(n) = r^n$ on differenssiyhtälön (*) ei-triviaali ratkaisu jos ja vain jos r toteuttaa **karakteristisen yhtälön**

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Karakteristisen yhtälön juurien laadun mukaan päädytään kolmeen eri tapaukseen:

1. Karakteristisella yhtälöllä on **kaksi eri suurta reaalista juurta** r_1 ja r_2.

   Yleinen ratkaisu on

   $$\boxed{x(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n.}$$

2. Karakteristisella yhtälöllä on **reaalinen kaksoisjuuri** r.

   Juuri r on tällöin

   $$r = -\frac{b}{2a},$$

   jolloin

   $$2ar + b = 0.$$

   Osoitetaan, että

   $$x(n) = nr^n$$

   on ratkaisu. Sijoitetaan tämä yhtälöön:

   $$a(n+2)r^{n+2} + b(n+1)r^{n+1} + cnr^n = 0$$
   $$\Leftrightarrow nar^{n+2} + 2ar^{n+2} + nbr^{n+1} + br^{n+1} + ncr^n = 0$$
   $$\Leftrightarrow r^n\left[n\left(ar^2 + br + c\right) + r(2ar + b)\right] = 0.$$

   Viimeinen yhtälö pätee, sillä r on karakteristisen yhtälön kaksoisjuuri. *Yleinen ratkaisu* on

   $$\boxed{x(n) = C_1 r^n + C_2 nr^n.}$$

3. Karakteristisella yhtälöllä on **kaksi imaginaarista juurta** $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

   Olkoon kompleksiluvun trigonometrinen esitysmuoto

   $$r_1 = \alpha + \beta i = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

   Tällöin

   $$r_1^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n \cos n\varphi + i\rho^n \sin n\varphi.$$

   Koska $x(n) = r_1^n$ on yhtälön ratkaisu, ovat sen reaali- ja imaginaariosat $x(n) = \rho^n \cos n\varphi$ ja $x(n) = \rho^n \sin n\varphi$ yhtälön ratkaisuja. *Yleinen ratkaisu* on

   $$\boxed{x(n) = C_1\rho^n \cos n\varphi + C_2\rho^n \sin n\varphi}$$

Huomautus. Edellisissä yhtälöissä esiintyvät ρ ja φ ovat *xy*-tason pisteen (α, β) napakoordinaatit:

$$\begin{cases} \alpha = \rho \cos \varphi \\ \beta = \rho \sin \varphi \end{cases}.$$

ESIMERKKEJÄ

1. Ratkaistaan differenssiyhtälö
$$x(n+2) - x(n+1) - 6x(n) = 0$$
Karakteristisen yhtälön
$$r^2 - r - 6 = 0$$
juuret ovat
$$r_1 = 3, \quad r_2 = -2.$$
Siten yleinen ratkaisu on
$$x(n) = C_1 3^n + C_2 (-2)^n.$$

2. Ratkaistaan alkuarvoprobleema
$$2x(n+2) - 16x(n+1) + 32x(n) = 0 \qquad \begin{cases} x(0) = 5 \\ x(1) = 8 \end{cases}.$$
Karakteristisella yhtälöllä
$$2r^2 - 16r + 32 = 0$$
on kaksoisjuuri $r = 4$. Siten differenssiyhtälön yleinen ratkaisu on
$$x(n) = C_1 4^n + C_2 n \cdot 4^n.$$
Alkuehdot:
$$\begin{cases} x(0) = 5 \\ x(1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ 4C_1 + 4C_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 5 \\ C_2 = -3 \end{cases}$$
Siis alkuarvoprobleeman ratkaisu on
$$x(n) = 5 \cdot 4^n - 3n \cdot 4^n$$

3. Ratkaistaan differenssiyhtälö
$$x(n+2) - 4x(n+1) + 5x(n) = 0.$$
Karakteristisen yhtälön
$$r^2 - 4r + 5 = 0$$
juuret ovat kompleksiset
$$r_{1,2} = 2 \pm i.$$
Pisteen $(2, 1)$ napakoordinaatit ovat $\rho = 2{,}236$, $\varphi = 0{,}464\,\text{rad}$. Siten yleinen ratkaisu on
$$x(n) = C_1 \cdot 2{,}236^n \cos 0{,}464n + C_2 \cdot 2{,}236^n \sin 0{,}464n$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2.2:

Määritä yleiset ratkaisut differenssiyhtälöille

5. $x(n+2)+2x(n)=0$
6. $x(n+2)-x(n+1)-2x(n)=0$
7. $x(n+2)-6x(n+1)+9x(n)=0$
8. $x(n+2)-8x(n+1)+15x(n)=0$
9. $x(n+2)-2x(n+1)+5x(n)=0$
10. $x(n+2)+3x(n+1)+2{,}25x(n)=0$

Ratkaise alkuarvoprobleemat:

11. $x(n+2)+2x(n)=0,\quad x(0)=1,\ x(1)=1$
12. $x(n+2)-x(n+1)-2x(n)=0,\quad x(0)=1,\ x(1)=1$
13. $x(n+2)-6x(n+1)+9x(n)=0,\quad x(0)=2,\ x(1)=0$
14. $x(n+2)-8x(n+1)+15x(n)=0,\quad x(0)=2,\ x(1)=-1$
15. $x(n+2)-2x(n+1)+5x(n)=0,\quad x(0)=3,\ x(1)=2$
16. $x(n+2)+3x(n+1)+2{,}25x(n)=0,\ x(0)=-1,\ x(1)=-1$
17. Määritä kaava, josta Fibonaccin luvut voidaan laskea.

2.2.2.4 <u>Täydellinen differenssiyhtälö</u>

Täydellisen differenssiyhtälön yleinen ratkaisu on vastaavan homogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun ja täydellisen yhtälön yksityisratkaisun summa. Homogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun määrittämistä on esitelty aiemmissa kappaleissa. Tässä kappaleessa esitetään, kuinka **täydellisen** eli **epähomogeenisen yhtälön** yksityisratkaisu tietyssä tapauksessa löydetään.

Tarkastellaan sellaista tapausta, jossa epähomogeeninen termi on polynomi. Tällöin differenssiyhtälö ratkaistaan sopivalla *yritteellä, jonka kertoimet määrätään sijoittamalla täydelliseen differenssiyhtälöön.*

Olkoon epähomogeeninen termi **polynomi**

$$b_n=\beta_q n^q+\beta_{q-1}n^{q-1}+\cdots+\beta_0$$

Jos $r=1$ *ei ole karakteristisen yhtälön juuri*, niin yrite on samanasteinen polynomi

$$x(n)=\gamma_q n^q+\gamma_{q-1}n^{q-1}+\cdots+\gamma_0$$

Jos $r=1$ *on karakteristisen yhtälön m-kertainen juuri*, niin yrite on muotoa

$$x(n)=n^m\left(\gamma_q n^q+\gamma_{q-1}n^{q-1}+\cdots+\gamma_0\right)$$

ESIMERKKEJÄ

1. Ratkaistaan täydellinen differenssiyhtälö

$$2x(n+1)-x(n)=n-2$$

Esitetään ratkaisu kolmessa vaiheessa:

<u>(i) Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu</u>

Vastaava homogeeninen yhtälö on

$$2x(n+1)-x(n)=0.$$

Tämän karakteristinen yhtälö on

$$2r-1=0,$$

jonka ratkaisu on

$$r=\frac{1}{2}.$$

Siten homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$x_H(n)=C\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

<u>(ii) Täydellisen yhtälön yksityisratkaisu</u>

Koska epähomogeeninen termi on 1. asteen polynomi, valitaan yritteeksi 1. asteen polynomi

$$x(n)=an+b.$$

Sijoitetaan tämä täydelliseen differenssiyhtälöön

$$2(a(n+1)+b)-(an+b)=n-2$$
$$\Leftrightarrow 2an+2a+2b-an-b=n-2$$
$$\Leftrightarrow an+2a+b=n-2$$

Edellinen yhtälö on voimassa kaikilla n. Siten n:n potenssien kertoimien on oltava samat yhtälön molemmilla puolilla. Päädytään yhtälöpariin

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \end{cases}$$

Siis differenssiyhtälön yksityisratkaisu on

$$x_I(n)=n-4$$

<u>(iii) Täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu</u>

$$x(n)=x_H(n)+x_I(n)=C\left(\frac{1}{2}\right)^n+n-4$$

2. Ratkaistaan täydellinen differenssiyhtälö

$$x(n+2)-x(n+1)-6x(n)=n^2.$$

<u>(i) Homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu</u>

Vastaava homogeeninen yhtälö on

$$x(n+2)-x(n+1)-6x(n)=0$$

Tämän yleinen ratkaisu on määritetty kappaleen 2.2.2.3 esimerkissä 1

$$x_H(n)=C_1 3^n+C_2(-2)^n.$$

<u>(ii) Täydellisen yhtälön yksityisratkaisu</u>

Koska epähomogeeninen termi on 2. asteen polynomi, valitaan yritteeksi 2. asteen polynomi

$$x(n)=an^2+bn+c.$$

Sijoitetaan tämä täydelliseen differenssiyhtälöön

$$a(n+2)^2+b(n+2)+c-a(n+1)^2-b(n+1)-c-6(an^2+bn+c)=n^2$$
$$\Leftrightarrow -6an^2+(2a-6b)n+3a+b-6c=n^2$$

Vertaamalla n:n potensseja saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -6a=1 \\ 2a-6b=0 \\ 3a+b-6c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{6} \\ b=-\dfrac{1}{18} \\ c=-\dfrac{5}{54} \end{cases}$$

Siis differenssiyhtälön yksityisratkaisu on

$$x_I(n)=-\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{18}n-\frac{5}{54}.$$

(iii) Täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu

$$x(n)=x_H(n)+x_I(n)=C_1 3^n+C_2(-2)^n-\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{18}n-\frac{5}{54}$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2.2:

Määritä yleiset ratkaisut differenssiyhtälöille

18. $x(k+1)+3x(k)=2k$
19. $3x(k+1)-2x(k)=-k+5$
20. $x(k+2)-x(k+1)-2x(k)=1$
21. $x(k+2)-x(k+1)-2x(k)=k+2$
22. $x(k+2)-6x(k+1)+9x(k)=k^2$

2.2.3 Ensimmäisen kertaluvun differenssiyhtälöryhmä

1. kertaluvun differenssiyhtälöryhmä on muotoa

$$\begin{cases} y_1(n+1)=f_1(n,y_1(n),y_2(n),\dots,y_N(n)) \\ y_2(n+1)=f_2(n,y_1(n),y_2(n),\dots,y_N(n)) \\ \dots \\ y_N(n+1)=f_N(n,y_1(n),y_2(n),\dots,y_N(n)) \end{cases}$$

missä

$$y_1, y_2, \dots, y_N$$

ovat tuntemattomia ratkaistavia lukujonoja.

Differenssiyhtälöryhmän ratkaisu koostuu sellaisista lukujonoista, jotka toteuttavat differenssiyhtälöryhmän kaikilla[29] $n = 0, 1, 2, \ldots$. Differenssiyhtälöryhmän **alkuarvoprobleemassa** on löydettävä se ratkaisu, joka indeksin arvolla 0 toteuttaa **alkuehdon**

$$\begin{cases} y_1(0) = \hat{y}_1 \\ y_2(0) = \hat{y}_2 \\ \ldots \\ y_N(0) = \hat{y}_N \end{cases}$$

missä $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_N$ ovat annettuja lukuja. Alkuarvoprobleemalla on **yksikäsitteinen ratkaisu**, sillä alkuarvoista lähtien voidaan rekursiivisesti laskea ratkaisun arvot indeksien arvoilla 1, 2, 3, ...

Differenssiyhtälöryhmä voidaan esittää *vektorimuodossa*

$$y(n+1) = f(n, y(n)),$$

missä $y(n)$ on N-vektori ja f on funktio, jonka arvona on N-vektori. Alkuehto on tällöin muotoa

$$y(0) = y_0,$$

missä y_0 on annettu N-vektori.

ESIMERKKEJÄ

1. Differenssiyhtälöryhmän alkuarvoprobleeman

$$\begin{cases} x(n+1) = -x(n) - 2y(n) \\ y(n+1) = -3x(n) - 2y(n) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

ratkaisuja voidaan laskea rekursiivisesti:

$$\begin{cases} x(1) = -x(0) - 2y(0) = -3 - 2 \cdot 2 = -7 \\ y(1) = -3x(0) - 2y(0) = -3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(2) = -x(1) - 2y(1) = -(-7) - 2 \cdot (-13) = 33 \\ y(2) = -3x(1) - 2y(1) = -3 \cdot (-7) - 2 \cdot (-13) = 47 \end{cases}$$

...

Myöhemmin kappaleen 2.3.3 esimerkissä 3 todetaan, ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$\begin{cases} x(n) = 2 \cdot 4^n (-1)^n + 1 \\ y(n) = 3 \cdot 4^n (-1)^n - 1 \end{cases}$$

Kertalukua N oleva lineaarinen vakiokertoiminen differenssiyhtälö

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n+k) = w(n) \qquad (*)$$

missä $a_N \neq 0$, voidaan *muuntaa 1. kertaluvun differenssiyhtälöryhmäksi* seuraavasti:

[29] Indeksijoukon alaraja voi olla muukin kuin nolla.

1. Ratkaistaan $y(n+N)$

$$y(n+N) = -\sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{a_N} y(n+k) + \frac{w(n)}{a_N}$$

2. Määritellään N lukujonoa

$$\begin{cases} y_1(n) = y(n) \\ y_2(n) = y(n+1) \\ y_3(n) = y(n+2) \\ \dots \\ y_N(n) = y(n+N-1) \end{cases}$$

3. Suoraan laskemalla todetaan, että nämä lukujonot toteuttavat differenssiyhtälöryhmän

$$\begin{cases} y_1(n+1) = y_2(n) \\ y_2(n+1) = y_3(n) \\ \dots \\ y_N(n+1) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{a_{k-1}}{a_N} y_k(n) + \frac{w(n)}{a_N} \end{cases}$$

Tämä ryhmä on differenssiyhtälöä (*) vastaava **normaaliryhmä.**

Lukujono $y(n) = y_1(n)$ on differenssiyhtälön (*) ratkaisu, jos ja vain jos $y_1(n), y_2(n), \dots, y_N(n)$ on vastaavan normaaliryhmän ratkaisu.

Jos differenssiyhtälöön (*) liittyy alkuehto

$$y(0) = y_0,\ y(1) = y_1, \dots, y(N-1) = y_{N-1}$$

niin vastaavan normaaliryhmän alkuehto on

$$\begin{cases} y_1(0) = y_0 \\ y_2(0) = y_1 \\ \dots \\ y_N(0) = y_{N-1} \end{cases}$$

ESIMERKKEJÄ

1. Muunnetaan differenssiyhtälö

$$y(n+3) - 5y(n+2) + y(n+1) - 2y(n) = n+2\,, \quad y(0) = -1,\ \ y(1) = 2,\ \ y(2) = 4$$

normaaliryhmäksi.

(i) Ratkaistaan $y(n+3)$:

$$y(n+3) = 5y(n+2) - y(n+1) + 2y(n) + n + 2$$

(ii) Määritellään kolme lukujonoa

$$\begin{cases} y_1(n) = y(n) \\ y_2(n) = y(n+1) \\ y_3(n) = y(n+2) \end{cases}$$

(iii) Tällöin

$$\begin{cases} y_1(n+1) = y(n+1) = y_2(n) \\ y_2(n+1) = y(n+2) = y_3(n) \\ y_3(n+1) = y(n+3) = 5y(n+2) - y(n+1) + 2y(n) + n + 2 \\ \qquad = 5y_3(n) - y_2(n) + 2y_1(n) + n + 2 \end{cases}$$

josta saadaan normaaliryhmä

$$\begin{cases} y_1(n+1) = y_2(n) \\ y_2(n+1) = y_3(n) \\ y_3(n+1) = 5y_3(n) - y_2(n) + 2y_1(n) + n + 2 \end{cases}$$

Alkuehdot ovat

$$\begin{cases} y_1(0) = y(0) = -1 \\ y_2(0) = y(1) = 2 \\ y_3(0) = y(2) = 4 \end{cases}$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2.2:

23. Muunna differenssiyhtälöt normaaliryhmiksi.

a) $y(n+2) - ny(n+1) - 3y(n) = n^2 + 2$, $y(0) = -2$, $y(1) = 3$,

b) $y(n+3) - y(n+2) - 3y(n) = \sin n + n$, $y(0) = -3$, $y(1) = 2$, $y(2) = 0$

2.2.4 Differenssiyhtälön määräämä järjestelmä

Diskreettejä järjestelmiä voidaan usein esittää differenssiyhtälöillä.

Tarkastellaan järjestelmää, jonka *herätteenä* on lukujono $x(n)$. Differenssiyhtälöesityksessä *vaste* $y(n)$ on muotoa

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n+k) = \sum_{k=N_1}^{N_2} b_k x(n+k) \qquad (*)$$

olevan differenssiyhtälön ratkaisu. Differenssiyhtälössä

- $N_1 \le N_2 \le N$
- $a_N \ne 0$
- $b_{N_2} \ne 0$

Ehto $N_2 \le N$ on yhtäpitävä järjestelmän *kausaalisuuden* kanssa, mikä nähdään kirjoittamalla yhtälö (*) muotoon

$$y(n+N)=-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{a_k}{a_N}y(n+k)+\sum_{k=N_1}^{N_2}\frac{b_k}{a_N}x(n+k),$$

Kyseessä on kappaleessa 2.2.1 esitetyn muotoa

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n+k)=w(n)$$

olevan differenssiyhtälön erikoistapaus, jossa

$$w(n)=\sum_{k=N_1}^{N_2}b_k x(n+k).$$

Koska $w(n)=0$, kun $n<0$, on järkevää asettaa herätteelle $x(n)$ vaatimus $x(n)=0$, kun $n<N_2$

Lineaarisessa järjestelmässä 0-herätteen vaste on 0. Jos haluamme, että differenssiyhtälön määräämä järjestelmä on lineaarinen on meidän siten asetettava differenssiyhtälön alkuehdot nolliksi. Voidaankin todeta:

Jos differenssiyhtälön

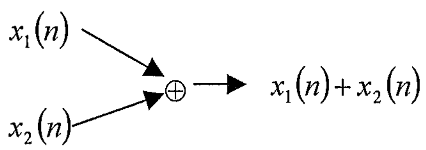
$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n+k)=\sum_{k=N_1}^{N_2}b_k x(n+k)$$

alkuehdot ovat nollia, on differenssiyhtälön määräämä diskreetti järjestelmä kausaalinen LTI-järjestelmä.

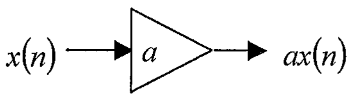
2.2.5 Lohkokaavioesitys

Diskreettejä järjestelmiä esitetään usein *lohkokaaviona*. Lohkokaavioesityksestä päädytään helposti järjestelmän differenssiyhtälöesitykseen. Lohkokaavioissa käytetään seuraavia operaattoreita:

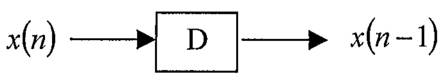
- summain:



- vakiolla kertominen:



- yksikköviive:



Esimerkit havainnollistavat asiaa.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritä kuvan järjestelmän differenssiyhtälöesitys.

   Suoraan kuvasta saadaan

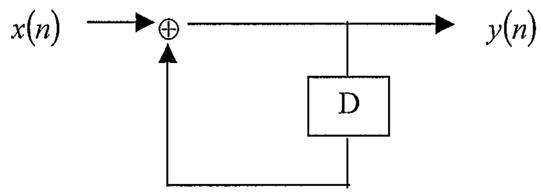
$$y(n) = x(n) + y(n-1),$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

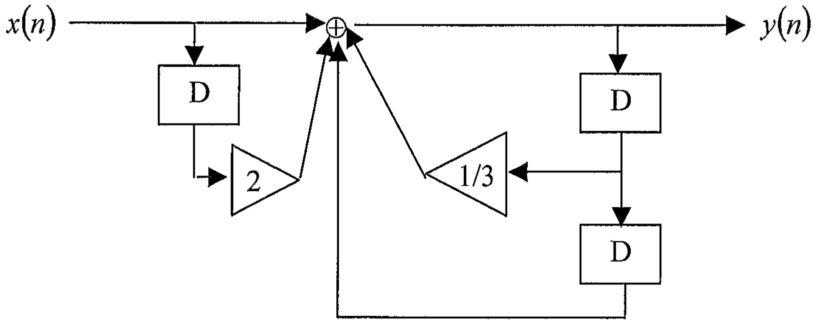
$$y(n) - y(n-1) = x(n)$$

Vaihtamalla n:n paikalla $n + 1$ saadaan yhtälö muotoon

$$y(n+1) - y(n) = x(n+1)$$



2. Määritä kuvan järjestelmän differenssiyhtälöesitys.



Suoraan kuvasta saadaan

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + y(n-2) + \frac{1}{3}y(n-1),$$

josta voidaan kirjoittaa muotoon

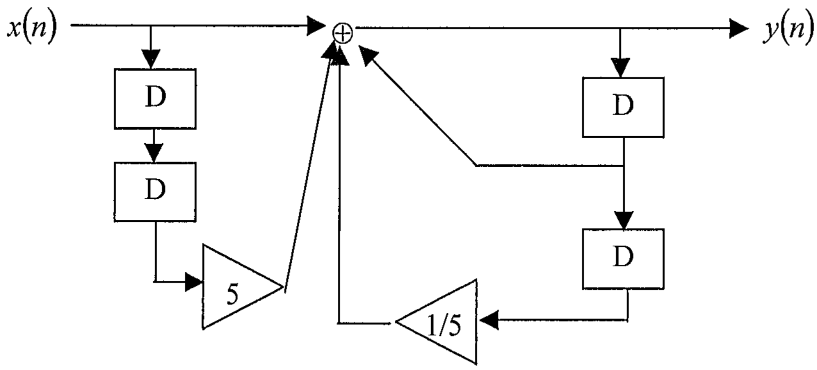
$$y(n) - \frac{1}{3}y(n-1) + y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

Vaihtamalla n:n paikalla $n + 2$ saadaan yhtälö muotoon

$$y(n+2) - \frac{1}{3}y(n+1) + y(n) = x(n+2) + 2x(n+1)$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2.2:

24. Määritä kuvan järjestelmän differenssiyhtälöesitys.



2.3 Z-muunnokset

2.3.1 Peruskäsitteet

Tarkastellaan *kausaalista lukujonoa* $x(n)$. Tällöin $x(n)=0$, kun $n<0$. z-muunnos asettaa *lukujonoa vastaamaan kompleksimuuttujan funktion*. Seuraavassa esitetään määritelmät.

Lukujono $x(n)$ on **z-muuntuva**, jos sarja

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}.$$

suppenee. Tällöin

- sarjan summa $X(z)$ on lukujonon $x(n)$ **z-muunnos**[30]
- lukujono $x(n)$ on funktion $X(z)$ **z-käänteismuunnos.**

Jatkossa merkitään lukujonoa aina *pienellä kirjaimella* ja sen z-muunnosta *vastaavalla isolla kirjaimella.* Lukujono $x(n)$ ja sen z-muunnos $X(z)$ muodostavat **z-muunnosparin**, jolle käytetään merkintää

$$x(n)\leftrightarrow X(z) \text{ tai } X(z)\leftrightarrow x(n).$$

z-muunnokselle käytetään myös merkintää

$$X(z)=Z[x(n)]$$

ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään lukujonon $x(n)=1$ kaikilla n z-muunnos.

   Ratkaisu: z-muunnos on sarjan

   $$\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots$$

   summa. Tämä on geometrinen sarja, jonka ensimmäinen termi on $a=1$ ja suhdeluku $q=\frac{1}{z}$.

   Täten sarja suppenee, kun $|q|<1$ eli $|z|>1$ ja sarjan summa on

   $$\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1}.$$

   Lukujonon z-muunnos on siis

   $$X(z)=\frac{z}{z-1}.$$

2.3.2 Laskusäännöt ja laskukaavat

Työskenneltäessä z-muunnoksilla joudutaan toistuvasti suorittamaan z-muunnoksia ja z-käänteismuunnoksia. Näitä ei kuitenkaan lasketa määritelmään perustuen, vaan seuraavilla tavoilla:

[30] Tarkemmin: kyseessä on *yksipuolinen z-muunnos.*

- Käytetään *muunnostaulukoita*, joista löytyy tiettyjen *perusfunktioiden z-muunnokset*. Muiden funktioiden z-muunnokset johdetaan näistä käyttäen *z-muunnosten laskusääntöjä*.
- Käytetään *tietokoneohjelmia* tai *laskimia*. Tällöinkin on syytä tuntea z-muunnosten perusominaisuudet.

Tässä kappaleessa esitetään yleisimmät laskusäännöt ja joidenkin perusfunktioiden z-muunnokset.

Palautetaan ensiksi mieleen kaksi peruslukujonoa (ks. kappale 2.1.1):

Yksikkönäytteellä eli yksikkönäytejonolle tarkoitetaan lukujonoa

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, \text{ kun } n = 0 \\ 0, \text{ kun } n \neq 0 \end{cases}.$$

Yksikköaskeleella tarkoitetaan lukujonoa

$$u(n) = \begin{cases} 1, \text{ kun } n \geq 0 \\ 0, \text{ kun } n < 0 \end{cases}$$

Seuraavaan taulukkoon on koottu *z-muunnossääntöjä*.

No	Lukujono $x(n)$	z-muunnos $X(z)$	Ehto	Nimitys
S1	$ax(n)+by(n)$	$aX(z)+bY(z)$		Lineaarisuus
S2	$x(n+k)$	$z^k X(z)-x(0)z^k - x(1)z^{k-1} - \cdots - x(k-1)z$	$k>0$	
S3[31]	$x(n-k)u(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	$k>0$	Siirto oikealla
S4	$a^{-n}x(n)$	$X(az)$		Potenssilla kertominen
S5	$nx(n)$	$-zX'(z)$		
S6	$n^k x(n)$	$\left(-z\dfrac{d}{dz}\right)^k X(z)$	$k>0$	
S7	$(x*y)(n)$	$X(z)Y(z)$		Konvoluution muunnos

Todistetaan joitain näistä z-muunnossäännöistä:

<u>Sääntö 1:</u> $ax(n)+by(n) \leftrightarrow aX(z)+bY(z)$

Koska

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

[31] Kausaaliselle lukujonolle $x(n-k)u(n-k)$ on sama kuin $x(n-k)$.

$$Y(z)=\sum_{n=0}^{\infty}y(n)z^{-n}$$

on lukujonon $(ax(n)+by(n))_{n=0}^{\infty}$ z-muunnos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(ax(n)+by(n))z^{-n}=a\sum_{k=0}^{\infty}x(n)z^{-n}+b\sum_{k=0}^{\infty}y(n)z^{-n}=aX(z)+bY(z)$$

<u>Sääntö 2:</u> $x(n+k)\leftrightarrow z^kX(z)-x(0)z^k-x(1)z^{k-1}-\cdots-x(k-1)z$:

Lukujonon $(x(n+k))_{n=0}^{\infty}$ z-muunnos on

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}x(n+k)z^{-n}&=\sum_{n=k}^{\infty}x(n)z^{-(n-k)}=\sum_{n=k}^{\infty}x(n)z^{-n}z^{k}=z^k\sum_{n=k}^{\infty}x(n)z^{-n}\\&=z^k\left(\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-k}-x(0)-x(1)z^{-1}-\cdots-x(k-1)z^{-(k-1)}\right)\\&=z^k\left(X(z)-x(0)-x(1)z^{-1}-\cdots-x(k-1)z^{-(k-1)}\right)\\&=z^kX(z)-x(0)z^k-x(1)z^{k-1}-\cdots-x(k-1)z\end{aligned}$$

Yllä toinen lauseke on saatu vaihtamalla summeerausindeksiksi n:n sijasta $n-k$.

<u>Sääntö 5:</u> $nx(n)\leftrightarrow -zX'(z)$

Sarja

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

voidaan suppenemisalueessaan derivoida termeittäin:

$$X'(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}nx(n)z^{-n-1}.$$

Tästä nähdään, että

$$-zX'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nx(n)z^{-n},$$

josta sääntö seuraa.

<u>Sääntö 7:</u> $(x*y)(n)\leftrightarrow X(z)Y(z)$

Lukujonojen x ja y konvoluutio $x*y$ on

$$(x*y)(n)=\sum_{k=0}^{n}x(k)y(n-k)=\sum_{i+j=n}x(i)y(j)$$

Edellä summeerataan yli kaikkien i ja j, joille $0\le i,j\le n$.

Konvoluution z-muunnos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x*y)(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}x(i)y(j)\right)z^{-n}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty}x(i)z^{-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}y(j)z^{-j}\right) = X(z)Y(z)$$

Seuraavaan taulukkoon on koottu *z-muunnoskaavoja*. Taulukossa k on ei-negatiivinen kokonaisluku, a, $r > 0$ ja θ ovat vakioita.

No	**Lukujono** $x(n)$	z**-muunnos** $X(z)$
K1	$\delta(n-k) = \begin{cases} 1, \text{kun } n = k \\ 0, \text{kun } n \neq k \end{cases}$	$\dfrac{1}{z^k}$
K2	a^n	$\dfrac{z}{z-a}$
K3	$a^{n-1}u(n-1) = \begin{cases} 0, & \text{kun } n = 0 \\ a^{n-1}, & \text{kun } n \geq 1 \end{cases}$	$\dfrac{1}{z-a}$
K4	n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
K5	n^2	$\dfrac{2z}{(z-1)^3}$
K6	$r^n \cos n\theta$	$\dfrac{z(z-r\cos\theta)}{z^2-2rz\cos\theta+r^2}$
K7	$r^n \sin n\theta$	$\dfrac{rz\sin\theta}{z^2-2rz\cos\theta+r^2}$

Huom. Kaavojen K1 ja K2 erikoistapauksina saadaan yksikkönäytteen ja yksikköaskeleen z-muunnokset:

$$\delta(n) \leftrightarrow 1$$

$$u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \qquad (*)$$

Johdetaan joitain taulukon kaavoista.

<u>Kaava 1:</u> $\delta(n-k) \leftrightarrow \dfrac{1}{z^k}$

Suoraan $\delta(n-k)$:n määritelmästä saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n-k)z^{-n} = z^{-k}$$

Kaava 2: $a^n \leftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$

Käyttämällä geometrisen sarjan summan kaavaa saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

Kaava 3: $a^{n-1}u(n-1) \leftrightarrow \dfrac{1}{z-a}$

Sääntöä S3 ja kaavaa K2 käyttäen saadaan

$$a^{n-1}u(n-1) \leftrightarrow z^{-1} \cdot \frac{z}{z-a} = \frac{1}{z-a}$$

Kaava 4: $n \leftrightarrow \dfrac{z}{(z-1)^2}$

Koska

$$n = n \cdot u(n),$$

saadaan sääntöä S5 ja kaavaa (*) käyttäen

$$n \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2.3:

1. Johda sääntö S3.
2. Johda sääntö S4.
3. Johda sääntö S6.
4. Johda kaavaa K5: $n^2 \leftrightarrow \dfrac{2z}{(1-z)^3}$.

2.3.3 Differenssiyhtälön ratkaiseminen

z-muunnokset soveltuvat hyvin lineaaristen vakiokertoimisten differenssiyhtälöiden ja differenssiyhtälöryhmien alkuarvoprobleemien ratkaisemiseen. Differenssiyhtälöiden ratkaiseminen perustuu z-muunnoksen lineaarisuuteen (S1) ja sääntöön S2:

$$x(n+k) \leftrightarrow z^k X(z) - x(0)z^k - x(1)z^{k-1} - \cdots - x(k-1)z$$

jonka erikoistapaukset ovat

$$x(n+1) \leftrightarrow zX(z) - x(0)z$$
$$x(n+2) \leftrightarrow z^2X(z) - x(0)z^2 - x(1)z$$

Tarkastellaan **differenssiyhtälön alkuarvotehtävää**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n+k) = w(n), \qquad (*)$$

$$y(0) = y_0,\ y(1) = y_1, \ldots, y(N-1) = y_{N-1}.$$

Ratkaisu muodostetaan seuraavasti:

1. z-muunnetaan yhtälö (*) käyttäen z-muunnoksen sääntöjä ja z-muunnoskaavoja.
2. Ratkaistaan syntyneestä 1. asteen yhtälöstä ratkaisun z-muunnos $Y(z)$.
3. z-käänteismuunnetaan funktio $Y(z)$.

Sopivaa matematiikkaohjelmaa käytettäessä on käsin laskettava ainoastaan kohdassa 1 differenssiyhtälön vasemman puolen z-muunnos sääntöä S2 käyttäen. Tämä sääntö ottaa automaattisesti huomioon alkuarvot. Lopun voi tehdä matematiikkaohjelmalla.

Differenssiyhtälöryhmien alkuarvoprobleeman ratkaisutekniikka on hyvin samanlainen.

Seuraavissa esimerkeissä on esitelty Maplen käyttöä differenssiyhtälöiden ratkaisemisessa.

ESIMERKKEJÄ

1. Ratkaistaan alkuarvoprobleema (vrt. kappaleen 2.2.2.3 esimerkki 2)

$$2y(n+2) - 16y(n+1) + 32y(n) = 0 \qquad \begin{cases} y(0) = 5 \\ y(1) = 8 \end{cases}$$

z-muunnetaan differenssiyhtälö käsin:

$$2(z^2Y - 5z^2 - 8z) - 16(zY - 5z) + 32Y = 0$$

Ratkaistaan tästä z-muunnos Y (Maplen komento **solve**):

```
> solve(2*(z^2*Y-5*z^2-8*z)-16*(z*Y-5*z)+32*Y=0,Y);
```

$$\frac{z\,(5\,z-32)}{z^2 - 8\,z + 16}$$

Siis

$$Y(z) = \frac{5z^2 - 32z}{z^2 - 8z + 16}.$$

z-käänteismuunnetaan tämä (Maplen komento **invztrans**; % viittaa edelliseen tulokseen)

```
> invztrans(%,z,n);
```

$$5\,4^n - 3\,4^n\,n$$

joten ratkaisu on

$$y(n) = 5 \cdot 4^n - 3n \cdot 4^n.$$

2. Ratkaistaan alkuarvoprobleema

$$x(n+2) + 2x(n+1) - 8x(n) = 2n^2 - n \qquad \begin{cases} x(0) = 3 \\ x(1) = -1 \end{cases}$$

z-muunnetaan differenssiyhtälön vasen puoli käsin:

$$z^2X-3z^2+z+2(zX-3z)-8X.$$

Seuraavassa on esitetty laskun jatko Maplea käyttäen.

Yhtälön oikean puolen z-muunnos (Maplen komento **ztrans**):

```
> ztrans(2*n^2-n,n,z);
```

$$2\frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3}-\frac{z}{(z-1)^2}$$

Ratkaistaan differenssiyhtälön z-muunnoksesta X:

```
> solve(z^2*X-3*z^2+z+2*(z*X-3*z)-8*X=%,X);
```

$$\frac{z\,(3\,z^4-4\,z^3-6\,z^2+13\,z-2)}{(z-1)^3\,(z^2+2\,z-8)}$$

z-käänteismuunnetaan X:

```
> invztrans(%,z,n);
```

$$-\frac{104}{125}-\frac{11}{25}n-\frac{2}{5}n^2+\frac{437}{375}(-4)^n+\frac{8}{3}2^n$$

Siis ratkaisu on

$$x(n)=-\frac{104}{125}-\frac{11}{25}n-\frac{2}{5}n^2+\frac{437}{375}(-1)^n4^n+\frac{8}{3}2^n$$

3. Ratkaistaan differenssiyhtälöryhmän alkuarvoprobleema (vrt. kappaleen 2.2.3 esimerkki 1)

$$\begin{cases}x(n+1)=-x(n)-2y(n)\\ y(n+1)=-3x(n)-2y(n)\end{cases}\qquad \begin{cases}x(0)=3\\ y(0)=2\end{cases}$$

z-muunnetaan differenssiyhtälöryhmä käsin:

$$\begin{cases}zX-3z=-X-2Y\\ zY-2z=-3X-2Y\end{cases}$$

Käytetään ratkaisussa Maplea.

Ratkaistaan X ja Y:

```
> eq:={z*X-3*z=-X-2*Y,z*Y-2*z=-3*X-2*Y};
```

$$eq:=\{z\,X-3\,z=-X-2\,Y,z\,Y-2\,z=-3\,X-2\,Y\}$$

```
> ratk:=solve(eq,{X,Y});
```

$$ratk:=\{X=\frac{z\,(2+3\,z)}{-4+z^2+3\,z},\,Y=\frac{z\,(2\,z-7)}{-4+z^2+3\,z}\}$$

z-käänteismuuntamalla X ja Y saadaan ratkaisu (**Maplen** komento **rhs** antaa lausekkeen oikean puolen)

```
> invztrans(rhs(ratk[1]),z,n);
```

$$2\,(-4)^n+1$$

```
> invztrans(rhs(ratk[2]),z,n);
```

$3\,(-4)^n - 1$

Siis ratkaisu on

$$\begin{cases} x = 2\cdot(-4)^n + 1 \\ y = 3\cdot(-4)^n - 1 \end{cases}$$

Differenssiyhtälö ratkaistaan siis z-muunnoksilla siten, että *differenssiyhtälö muunnetaan algebralliseksi yhtälöksi, josta määritetään ratkaisun z-muunnos*. Saadun z-muunnoksen z-käänteismuunnos on differenssiyhtälön ratkaisu. Vastaava koskee differenssiyhtälöryhmiä.

HARJOITUSTEHTÄVÄT 2.3:

5. z-muunna differenssiyhtälöt

   a) $3x(n+1) - 4x(n) = 0, \quad x(0) = 2$ b) $5x(n+1) + 4x(n) = n, \quad x(0) = 5$

6. z-muunna differenssiyhtälöt

   a) $x(n+2) + 2x(n) = 0, \quad x(0) = 1,\ x(1) = 1$

   b) $x(n+2) - x(n+1) - 2x(n) = n^2, \quad x(0) = 2,\ x(1) = -3$

   c) $x(n+3) - 4x(n+2) - 6x(n+1) + 9x(n) = \delta(n-2), \quad x(0) = 2,\ x(1) = 0,\ x(2) = 5$

2.3.4 Siirtofunktio

Lineaarisen aikainvariantin järjestelmän **siirtofunktiolla** tarkoitetaan[32] *impulssivasteen z-muunnosta.* Jos järjestelmän impulssivastetta merkitään $h(n)$, on järjestelmän siirtofunktio siis

$$H(z) = Z[h(n)].$$

Olkoon järjestelmän heräte $x(n)$ ja vaste $y(n)$ ja näiden z-muunnokset vastaavasti $X(z)$ ja $Y(z)$. Vaste voidaan esittää impulssivasteen ja herätteen konvoluutiona

$$y(n) = (h * x)(n).$$

Ottamalla tästä z-muunnos saadaan (sääntö S7)

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

Siis siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

eli *siirtofunktio on järjestelmän vasteen ja herätteen z-muunnosten osamäärä.*

Kun järjestelmän siirtofunktio tunnetaan, niin *vasteen z-muunnos voidaan laskea kertolaskulla*

$$Y(z) = H(z)X(z).$$

Siirtofunktio sisältää informaation järjestelmän ominaisuuksista. Järjestelmän käyttäytymistä voidaankin analysoida tutkimalla järjestelmän siirtofunktiota.

[32] Impulssivastetta on käsitelty kappaleessa 2.1.3

Tarkastellaan differenssiyhtälömuodossa annettua LTI-järjestelmää. Järjestelmällä on tällöin esitys

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n+k) = \sum_{k=N_1}^{N_2} b_k x(n+k)$$

jossa alkuehdot ovat nollia (sekä y:lle että x:lle, ks. kappale 2.2.4).

Koska alkuehdot ovat nollia, saadaan differenssiyhtälön z-muunnokseksi

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^k Y(z) = \sum_{k=N_1}^{N_2} b_k z^k X(z).$$

Tästä saadaan järjestelmän siirtofunktio

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=N_1}^{N2} b_k z^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^k}.$$

Siirtofunktio $H(z)$ on siis *rationaalifunktio*. Kausaalisuusehdon $N_2 \leq N$ perusteella *osoittajan aste on pienempi tai yhtä suuri kuin nimittäjän aste.*

ESIMERKKEJÄ

1. Lineaarisen järjestelmän impulssivaste on

   $$h(n) = n^2 - n.$$

   Määritä järjestelmän askelvaste.

   Ratkaisu: Käytetään ratkaisussa Maplea.

   Järjestelmän siirtofunktio on impulssivasteen z-muunnos H:

   ```
   > H:=ztrans(n^2-n,n,z);
   ```

   $$H := \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z}{(z-1)^2}$$

   Herätteenä on nyt yksikköaskel $u(n)$, jonka z-muunnos U on (Maplessa yksikköaskel on **Heaviside**)

   ```
   > U:=ztrans(Heaviside(n),n,z);
   ```

   $$U := \frac{z}{z-1}$$

   Siten vasteen z-muunnos on HU (Maplen komento **simplify** sieventää)

   ```
   > simplify(H*U);
   ```

   $$2\frac{z^2}{(z-1)^4}$$

   Tämän z-käänteismuunnos on

   ```
   > invztrans(%,z,n);
   ```

   $$-\frac{1}{3}n + \frac{1}{3}n^3$$

Siis askelvaste on

$$y(n) = -\frac{1}{3}n + \frac{1}{3}n^3.$$

2. Tarkastellaan puhdasta *viivettä*, jossa viive on $k \geq 0$. Herätteen $x(n)$ vaste on tällöin

$$x_d(n) = x(n-k) = u(n-k)x(n-k),$$

missä $u(t)$ on yksikköaskel.

Säännön S3 mukaan vasteen z-muunnos on

$$X_d(z) = z^{-k}X(z).$$

Viiveen siirtofunktio on siten

$$H(z) = \frac{X_d(z)}{X(z)} = z^{-k}.$$

Tämä on tietenkin impulssivasteen $\delta(n-k)$ z-muunnos (K1)

$$Z[\delta(n-k)] = z^{-k}$$

2.3.5 Stabiilisuus

Lineaarisen aikainvariantin järjestelmän **stabiilisuus**[33] voidaan selvittää siirtofunktion avulla:

> Lineaarinen aikainvariantti järjestelmä on stabiili, jos ja vain jos siirtofunktion *navat sijaitsevat yksikköympyrän sisäpuolella.*

Perustelu[34]: Siirtofunktio on impulssivasteen h z-muunnos:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}.$$

Tarkastellaan funktiota

$$G(z) = H\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{n}.$$

Todistetaan väite kahdessa osassa:

1) Stabiilisuus $\Rightarrow$ Navat yksikköympyrän sisäpuolella.

Jos järjestelmä on stabiili, on kappaleen 2.1.4 stabiilisuusehdon mukaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty.$$

Siis potenssisarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{n}$$

33 Stabiilisuutta on käsitelty kappaleessa 2.1.4

34 Perustelu edellyttää analyyttisten funktioiden teorian tuntemista.

suppenee arvolla $z = 1$. Sarjateorian mukaan potenssisarja suppenee kaikilla $|z| < 1$. Siis funktio $G(z)$ on analyyttinen yksikköympyrän sisällä, joten sen navat ovat yksikköympyrän ulkopuolella. Täten siirtofunktion $H(z)$ navat ovat yksikköympyrän sisäpuolella.

2) Navat yksikköympyrän sisäpuolella $\Rightarrow$ Stabiilisuus.

Jos siirtofunktion $H(z)$ navat ovat yksikköympyrän sisäpuolella, on funktio $G(z)$ analyyttinen suljetussa yksikköympyrässä. Täten sen potenssisarjakehitelmä suppenee itseisesti suljetussa yksikköympyrässä, erikoisesti pisteessä 1. Siis

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty .$$

Aikaisemmin todetun stabiilisuusehdon mukaan järjestelmä on stabiili.

ESIMERKKEJÄ

1. Lineaarisen järjestelmän siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{30z^2 + z}{42z^2 - 7z - 14}.$$

Selvitä järjestelmän stabiilisuus.

Ratkaisu: Järjestelmän navat ovat siirtofunktion nimittäjän nollakohdat

$$42z^2 - 7z - 14 = 0 \Leftrightarrow z_1 = \frac{3}{2} \quad z_2 = -\frac{1}{2}$$

Koska nollakohtien itseisarvot ovat pienempiä kuin yksi, on järjestelmä stabiili.

Seuraavassa tehtävä on ratkaistu Maplella (komento **denom** antaa lausekkeen nimittäjän):

```
> H := (30*z^2+z)/(42*z^2-7*z-14);
```

$$H := \frac{30\,z^2 + z}{42\,z^2 - 7\,z - 14}$$

```
> solve(denom(H)=0,z);
```

$$\frac{2}{3}, \frac{-1}{2}$$

Tarkistetaan järjestelmän stabiilisuus laskemalla vielä impulssivaste

```
> h:=invztrans(H,z,n);
```

$$h := \frac{2\left(\frac{-1}{2}\right)^n}{7} + \frac{3\left(\frac{2}{3}\right)^n}{7}$$

Koska (komento **sum** laskee summan)

```
> sum(2/7*(1/2)^n+3/7*(2/3)^n,n=0..infinity);
```

$$\frac{13}{7}$$

on

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| \le \frac{13}{7}$$

ja järjestelmä on stabiili.

2.4 Dynaaminen lineaarinen järjestelmä

2.4.1 Tilaesitys

Tarkastellaan säätötekniikassa esiintyvää *diskreettiä monimuuttujajärjestelmää*, jossa heräte ja vaste voivat olla vektoreita. Käytetään samanlaisia merkintöjä kuin aikajatkuvaa monimuuttuja-järjestelmää käsittelevässä kappaleessa 1.8.1.

Diskreetin aikainvariantin lineaariseen järjestelmän **tilaesitys** on

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}, \qquad (*)$$

missä

- $x(k) \in \mathbf{R}^n$ on järjestelmän **tila**
- $u(k) \in \mathbf{R}^m$ on **heräte**
- $y(k) \in \mathbf{R}^r$ on **vaste**.

Yllä vakiot A, B, C ja D ovat matriiseja, joista A on *neliömatriisi.*

Tilaesityksessä

- differenssiyhtälö

  $$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad (**)$$

  kuvaa järjestelmän *sisäistä dynamiikkaa.*
- vastefunktio

  $$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

  kuvaa vasteen $y(k)$ riippuvuutta tilasta $x(k)$ ja herätteestä $u(k)$.

Yhtälön (*) mukainen lineaarinen järjestelmä on kappaleen 2.1.3 mielessä lineaarinen, jos differentiaaliyhtälön (**) alkutila on nolla: $x(0) = \boldsymbol{0}$.

ESIMERKKEJÄ

2. Muodostetaan differenssiyhtälön

   $$y(n+3) - 5y(n+2) + y(n+1) - 2y(n) = n+2$$

   tilaesitys, kun herätteeksi otetaan epähomogeeninen termi $x(n) = n+2$.

   Kappaleen 2.2.3 esimerkissä 2 on muodostettu differentiaaliyhtälöä vastaava *normaaliryhmä*

   $$\begin{cases} y_1(n+1) = y_2(n) \\ y_2(n+1) = y_3(n) \\ y_3(n+1) = 5y_3(n) - y_2(n) + 2y_1(n) + n + 2 \end{cases}.$$

   Tämä voidaan kirjoittaa tilaesityksenä seuraavasti:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_1(n+1) \\ y_2(n+1) \\ y_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ y_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [n+2] \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ y_3(n) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Tilaesityksen matriisit ovat siten

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ D = [0]$$

2.4.2 Siirtofunktioesitys

Vektoriarvoisten lukujonojen z-muunnokset muodostetaan koordinaateittain samaan tyyliin kuin vektoriarvoisten funktioiden Laplace-muunnokset. *Muunnossäännöt ovat samanlaisia kuin skalaarifunktioiden muunnossäännöt.*

Esimerkiksi

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} zX_1(z) - x_1(0)z \\ zX_2(z) - x_2(0)z \\ \vdots \\ zX_n(z) - x_n(0)z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \\ \vdots \\ X_n(z) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} z = z\boldsymbol{X}(z) - \boldsymbol{x}(0)z$$

z-muuntamalla tilaesitys

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) + D\boldsymbol{u}(k) \end{cases}$$

jonka alkutila

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0},$$

saadaan järjestelmän *siirtofunktiolle* esitys (vrt. kappale 1.8.2)

$$H(z) = C(zI - A)^{-1} B + D.$$

Tätä sanotaan järjestelmän **siirtofunktioesitykseksi.**

Siirtofunktioesitys on $r \times m$-matriisi, jonka alkiot ovat rationaalifunktioita, joiden osoittajan aste on pienempi tai yhtä suuri kuin nimittäjän aste.

2.4.3 Stabiilisuus

Kappaleen 2.3.5 mukaan tilaesityksenä annettu järjestelmä

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = A\boldsymbol{x}(k) + B\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) + D\boldsymbol{u}(k) \end{cases}$$

on stabiili, jos järjestelmän siirtofunktion

$$H(z) = C(zI - A)^{-1} B + D$$

navat sijaitsevat yksikköympyrän sisäpuolella. Kuten Laplace-muunnosten yhteydessä (kappale 1.8.3), tämä toteutuu, jos matriisin A karakteristisen yhtälön

$$\det(zI - A) = 0$$

juuret ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä eli jos *matriisin A ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä*. Tällöin rajoitetulla herätteellä tila pysyy rajoitettuna.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään kappaleen 2.4.1 esimerkin 1 järjestelmän stabiilisuus.

   Matriisi A on

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Tämän ominaisarvot ovat karakteristisen yhtälön

$$\det(zI - A) = 0$$
$$\Leftrightarrow z^3 - 5x^2 + z - 2 = 0$$

   juuret

$$z_1 \approx 4{,}87906...$$
$$z_{2,3} \approx 0{,}060471 \pm 0{,}637384i$$

   Koska z_1 ei ole yksikköympyrän sisällä, on järjestelmä epästabiili.

3. FOURIER-SARJAT

3.1 Fourier-sarja

Tarkastellaan jaksollisia funktioita, joiden *jakso* on T. Vastaava *kulmataajuus*

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

jolloin

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Helposti todetaan (ks. kappaleen 0.7 esimerkki 2), että vakiofunktiolla 1 ja trigonometrisillä funktioilla $\cos\omega t$ ja $\sin\omega t$ on jaksona T. Myös näiden **harmonisilla monikerroilla**

$$\cos 2\omega t, \cos 3\omega t, \cos 4\omega t, \ldots$$

ja

$$\sin 2\omega t, \sin 3\omega t, \sin 4\omega t, \ldots$$

on jaksona T. Funktioiden $\cos\omega t$ ja $\sin\omega t$ kulmataajuus on ω. Näiden harmonisten monikertojen kulmataajuus on ω:n monikerta.

Osoittautuu, että funktiot

$$1, \cos\omega t, \cos 2\omega t, \cos 3\omega t, \cos 4\omega t, \ldots$$

$$\sin\omega t, \sin 2\omega t, \sin 3\omega t, \sin 4\omega t, \ldots$$

muodostavat niin täydellisen funktiojoukon, että melkein kaikki jaksolliset funktiot, joiden *jakso* on T, voidaan esittää näiden avulla äärettöminä sarjoina. Näin päädytään **Fourier[35]-sarjoihin**, joita käytetään jaksollisten funktioiden analysointiin ja käsittelyyn. Tällaisia jaksollisia funktioita syntyy mm. sähköisessä signaalien siirrossa ja värähtelyissä.

3.1.1 Trigonometrinen muoto

Tarkastellaan jaksollista funktiota f, jonka on *jakso* T, jolloin vastaava *kulmataajuus*

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Oletetaan, että funktio f täyttää **Dirichlet'n[36] ehdot**:

Funktio on paloittain jatkuva ja suljetulla jaksovälillä funktiolla on korkeintaan äärellinen määrä ääriarvoja.

Dirichlet'n lauseen mukaan funktio f voidaan esittää[37] seuraavana **Fourier-sarjana**:

[35] **Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768-1830) oli ranskalainen matemaatikko, joka tutki mm. lämmön johtumista. Hän otti käyttöön trigonometriset sarjat, joita nykyään kutsutaan Fourier-sarjoiksi.

[36] **Peter L. Dirichlet** (1805-1859) oli saksalainen matemaatikko, joka sovelsi funktioteoriaa lukuteoriaan. Hän kehitti Fourier-sarjojen teoriaa ja esitti yleisen funktiokäsitteen.

[37] Kaavojen johto esitetty Liitteessä.

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t\right),$$

missä[38]

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos k\omega t\,dt \qquad (k=0,\,1,\,2,\,\ldots)$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin k\omega t\,dt \qquad (k=1,\,2,\,3,\,\ldots)$$

Tarkemmin: Funktion f

- jatkuvuuspisteissä t sarjan summa on $f(t)$.
- epäjatkuvuuspisteissä t sarjan summa on funktion f oikean- ja vasemmanpuoleisen raja-arvon keskiarvo.

Fourier-sarjassa funktio jaetaan tavallaan eri taajuuskomponentteihin: Kertoimet a_k ja b_k kertovat kuinka suuri paino kullakin taajuuskomponentilla on.

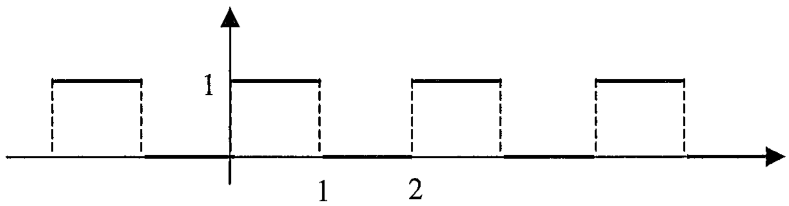
Myöhemmin esitetään Fourier-sarjalle muitakin esitysmuotoja. Edellä olevaa muotoa sanotaan **trigonometriseksi Fourier-sarjaksi.**

Trigonometrisen Fourier-sarjan vakiotermiä $\frac{a_0}{2}$ sanotaan funktion **tasakomponentiksi**, sillä se on T-jaksoisen *funktion f keskiarvo* $\langle f\rangle$: Arvolla $k=0$ edellä olevasta kaavasta saadaan

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)dt=\langle f\rangle.$$

ESIMERKKEJÄ

1. Määritä kuvan jaksollisen funktion f trigonometrinen Fourier-sarja.



Ratkaisu: Määritetään f:n Fourier-sarjan kertoimet. Funktion jakson pituus $T=2$, jolloin $\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$. Valitaan kaavoissa $t_0=0$.

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{2}{2}\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1 1\,dt=1$$

Arvoilla $k=1,\,2,\,3,\,\ldots$

[38] Integroimisrajassa oleva luku t_0 voi olla mikä tahansa reaaliluku (ks. kappale 0.7)

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt = \frac{2}{2}\int_0^1 \cos k\pi t\,dt = \frac{1}{k\pi}\Big|_0^1 \sin k\pi t = \frac{1}{k\pi}(\sin k\pi - \sin 0) = 0$$

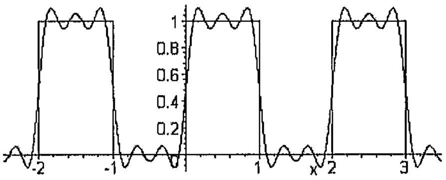
$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt = \frac{2}{2}\int_0^1 \sin k\pi t\,dt = -\Big|_0^1 \frac{1}{k\pi}\cos k\pi t = \frac{1}{k\pi}(1-\cos k\pi) = \frac{1-(-1)^k}{k\pi}$$

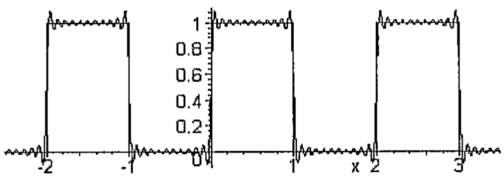
Siis

$$b_1 = \frac{2}{\pi},\ b_2 = 0,\ b_3 = \frac{2}{3\pi},\ b_4 = 0,\ b_5 = \frac{2}{5\pi},\ldots$$

Funktion f trigonometrinen Fourier-sarja on siis

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin \pi t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t + \cdots$$





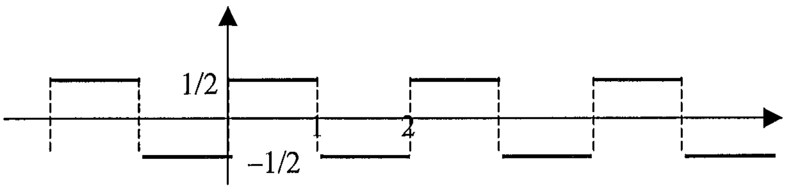
Oheisissa kuvissa on piirretty funktio ja sen trigonometrisen Fourier-sarjan osasummat

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin \pi t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t$$

ja

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin \pi t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t + \cdots + \frac{2}{21\pi}\sin 21\pi t$$

2. Määritä kuvan jaksollisen funktion g Fourier-sarja.

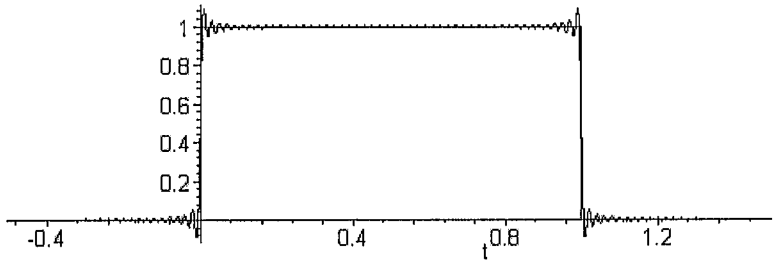


<u>Ratkaisu:</u> Kuvan funktio saadaan esimerkin 1 funktiosta f puolen yksikön siirrolla alaspäin. Siis $g = f - \frac{1}{2}$. Käyttäen esimerkin 1 tulosta saadaan funktion g trigonometriseksi Fourier-sarjaksi

$$g(t) = f(t) - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\sin \pi t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t + \cdots$$

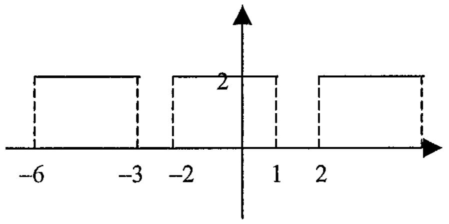
Esimerkin 1 kuvissa tulee esille **Gibbsin[39] ilmiö**: Fourier-sarjan osasumma värähtelee epäjatkuvuuskohdan ympäristössä. Värähtelystä ei pääse eroon vaikka osasummaan otettaisiin enemmän termejä. Seuraavassa on piirretty funktio ja Fourier-sarjan osasumma

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin \pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t+\cdots+\frac{2}{99\pi}\sin 99\pi t.$$

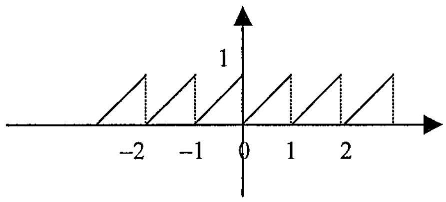


HARJOITUSTEHTÄVÄT 3.1:

1. Määritä kuvan funktion trigonometrinen Fourier-sarja.



2. Määritä kuvan funktion trigonometrinen Fourier-sarja.



3.1.2 Parilliset ja parittomat funktiot

Edellä olleista esimerkeistä on käynyt ilmi, että funktion Fourier-sarjassa saattaa olla vain sini- tai kosinitermejä. Tämä liittyy funktioiden parillisuuteen ja parittomuuteen, jotka määritellään seuraavasti:

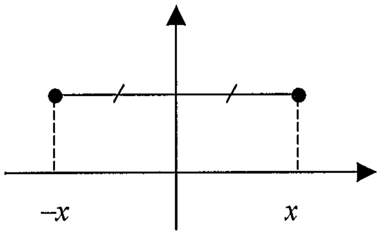
Funktio f on

- **parillinen**, jos $f(-x)=f(x)$ kaikilla x.
- **pariton**, jos $f(-x)=-f(x)$ kaikilla x.

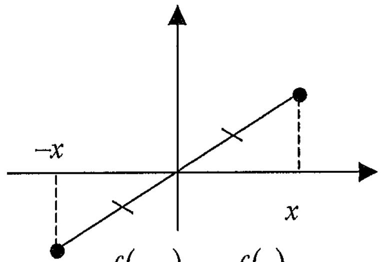
Funktion parillisuus ja parittomuus näkyy funktion kuvaajassa seuraavasti:

- parillisen funktion kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen
- parittoman funktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen

[39] **Josiah Willard Gibbs** (1839-1903) oli amerikkalainen fyysikko. Häntä pidetään nykyaikaisen termodynamiikan perustajana.



$f(-x)=f(x)$



$f(-x)=-f(x)$

Yleensä funktiot eivät ole kumpaakaan tyyppiä, mutta

- kosini on parillinen funktio
- sini on pariton funktio.

Kosini ja sini muodostavat tietyssä mielessä jaksollisten parillisten ja parittomien funktioiden perustan. Tämän johtamiseksi esitetään seuraavassa joitain parillisuuteen ja parittomuuteen liittyviä perustuloksia:

- parillisten funktioiden summa on parillinen.
- parittomien funktioiden summa on pariton.

Tuloista voidaan todeta seuraavaa:

- parillisten funktioiden tulo on parillinen
- parittomien funktioiden tulo on parillinen
- parillisen ja parittoman funktion tulo on pariton.

Jos funktio f on integroituva, niin

- $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$, jos f on *parillinen*
- $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, jos f on *pariton.*

Soveltamalla yllä esitettyjä tuloksia integraaleihin (kaavoissa $t_0 = -\frac{T}{2}$)

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega t\, dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega t\, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin k\omega t\, dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega t\, dt$$

päädytään seuraavaan tuloksiin:

- Jos f on parillinen, on $f(t)\sin k\omega t$ pariton, joten $b_k = 0$ kaikilla k.
- Jos f on pariton, on $f(t)\cos k\omega t$ pariton, joten $a_k = 0$ kaikilla k.

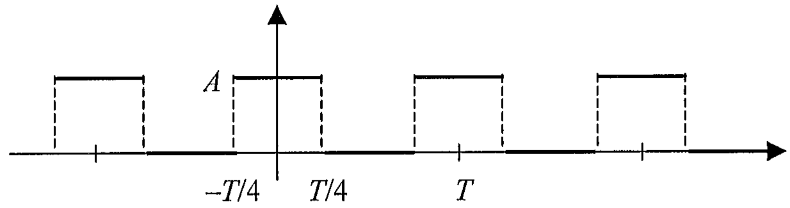
Siten

- Parillisen funktion Fourier-sarjassa on vain kosinitermejä.
- Parittoman funktion Fourier-sarjassa on sinitermejä.

Edellä vakiotermi käsitetään kosinitermiksi.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritä kuvan jaksollisen funktion *f* trigonometrinen Fourier-sarja.



Ratkaisu: Funktio on symmetrinen *y*-akselin suhteen, joten se on parillinen. Siten Fourier-sarjassa on vain kosinitermejä. Määritetään nämä. Valitaan kaavassa $t_0 = -\frac{T}{2}$.

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A dt = \frac{2}{T}\cdot A\cdot\frac{T}{2} = A$$

Kun $k > 0$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega t\, dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A\cos k\omega t\, dt = \frac{2A}{T}\Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \frac{1}{k\omega}\sin k\omega t$$

$$= \frac{2A}{T}\left(\sin\frac{k\omega T}{4} - \sin\left(-\frac{k\omega T}{4}\right)\right) = \frac{2A}{T}\cdot\frac{2}{k\omega}\sin\frac{k\omega T}{4}$$

Koska $\omega T = 2\pi$, on

$$a_k = \frac{2A}{k\pi}\sin k\frac{\pi}{2}$$

Siis

$$a_1 = \frac{2A}{\pi},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{2A}{3\pi},\ a_4 = 0,\ a_5 = \frac{2A}{5\pi},\ \ldots$$

Funktion *f* trigonometrinen Fourier-sarja on kosinisarja.

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\cos\omega t - \frac{2A}{3\pi}\cos 3\omega t + \frac{2A}{5\pi}\cos 5\omega t - \cdots$$

Koska $\omega = \frac{2\pi}{T}$, voidaan tämä kirjoittaa muodossa

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\cos\frac{2\pi}{T}t - \frac{2A}{3\pi}\cos\frac{6\pi}{T}t + \frac{2A}{5\pi}\cos\frac{10\pi}{T}t - \cdots$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 3.1:

3. Tutki seuraavien funktioiden mahdollista parillisuutta tai parittomuutta.

   a) $f(x) = \sin x \cos x$ b) $g(x) = \sin x + 1$

   c) $h(x) = \cos x + 1$ d) $k(x) = \sin x + \cos x$

   e) $l(x) = \tan 2x$ f) $m(x) = \sin^2 x + \cos 3x$

4. Oletetaan, että funktiot *f* ja *g* ovat parillisia sekä *h* ja *k* parittomia. Tutki funktioiden

   a) Tulot

   $T_1(x) = f(x)g(x)$

   $T_2(x) = h(x)k(x)$

   $T_3(x) = f(x)h(x)$

   b) Summat

   $S_1(x) = f(x) + g(x)$

   $S_2(x) = h(x) + k(x)$

   $S_3(x) = f(x) + h(x)$

   mahdollista parillisuutta ja parittomuutta.

5. Olkoon *f* integroituva funktio. Osoita

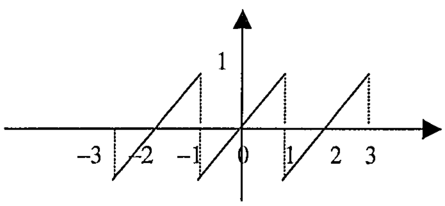
   a) Jos *f* on parillinen, niin

   $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

   b) Jos *f* on pariton, niin

   $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

6. Määritä kuvan funktion trigonometrinen Fourier-sarja.



3.1.3 Eksponenttimuoto

Sijoittamalla trigonometriseen Fourier-sarjaan

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$\sin x = -\frac{i}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

saadaan

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}\right) - i\frac{b_k}{2}\left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)\right)$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2}e^{-ik\omega t}\right)$$

Merkitään

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$
$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$
$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \overline{c_k}\,.$$

Fourier-sarja tulee nyt muotoon

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}\,.$$

Kertoimet c_k ($k > 0$) voidaan laskea seuraavasti:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega t\,dt - i\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin k\omega t\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)(\cos k\omega t - i\sin k\omega t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-ik\omega t}\,dt$$

Edellä viimeisessä vaiheessa on käytetty Eulerin kaavaa[40] (ks. kappale 0.3).

$$c_{-k} = \overline{c}_k = \overline{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-ik\omega t}\,dt} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{ik\omega t}\,dt$$

Tämä kaava pätee myös arvolla $k = 0$.

Saadaan seuraava **Fourier-sarjan eksponenttimuoto**:

Olkoon f Dirichlet'n ehdot täyttävä jaksollinen funktio, jonka jakso on T. Tällöin

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}\,,$$

missä

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-ik\omega t}\,dt$$

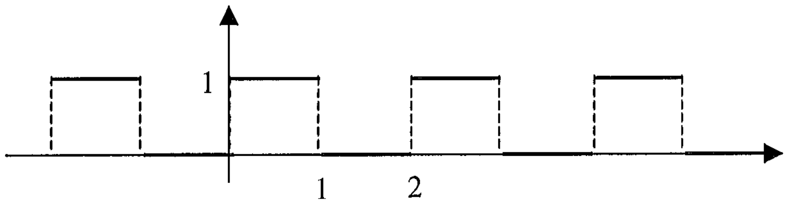
Yllä

[40] Kompleksilukuarvoisia funktioita integroidaan tavalliseen tapaan. Integraalin liittoluku on liittoluvun integraali.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

ESIMERKKEJÄ

1. Määritä kuvan jaksollisen funktion f Fourier-sarjan eksponenttimuoto. (Vrt. kappaleen 3.1.1 esimerkki 1)



Ratkaisu: Määritetään f:n Fourier-sarjan eksponenttimuodon kertoimet. Funktion jakson pituus $T = 2$, jolloin $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Valitaan kaavassa $t_0 = 0$.

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 1\,dt = \frac{1}{2}$$

Kun $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-ik\pi t}\,dt = \frac{1}{2}\Big|_0^1 -\frac{1}{ik\pi}e^{-ik\pi t} = \frac{1}{2}\frac{i}{k\pi}\left(e^{-ik\pi} - 1\right)$$

Siis

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{kun } k \neq 0 \text{ parillinen} \\ \dfrac{-i}{k\pi}, & \text{kun } k \text{ pariton} \end{cases}$$

Siten

$$f(t) = \frac{1}{2} - i\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\pi t}.$$

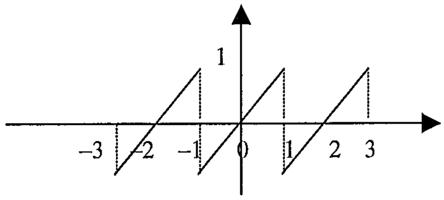
Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(t) = \frac{1}{2} - i\left(\frac{1}{\pi}e^{i\pi t} + \frac{1}{3\pi}e^{i3\pi t} + \frac{1}{5\pi}e^{i5\pi t} + \cdots\right) + i\left(\frac{1}{\pi}e^{-i\pi t} + \frac{1}{3\pi}e^{-i3\pi t} + \frac{1}{5\pi}e^{-i5\pi t} + \cdots\right).$$

Käyttämällä Eulerin kaavoja havaitaan, että saadaan sama sarja kuin aiemmassa esimerkissä (Tee tämä!)

HARJOITUSTEHTÄVÄT 3.1:

7. Osoita, että eksponenttimuotoisen Fourier-sarjan kertoimet ovat parillisen funktion tapauksessa reaalisia ja parittoman funktion tapauksessa puhtaasti imaginaarisia. (Vihje: käytä Eulerin kaavaa.)
8. Määritä kuvan funktion eksponenttimuotoinen Fourier-sarja.



3.1.4 Vaihekulmamuoto

Fourier-sarjan eksponenttimuoto voidaan esittää seuraavasti:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{ik\omega t} + c_{-k} e^{-ik\omega t}\right) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{ik\omega t} + \overline{c_k e^{ik\omega t}}\right)$$

$$= c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(c_k e^{ik\omega t}\right)$$

Jos merkitään kompleksiluvun c_k argumenttia

$$\varphi_k = \arg(c_k),$$

on

$$c_k = |c_k| e^{i\varphi_k}.$$

Koska

$$\mathrm{Re}\left(c_k e^{ik\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(|c_k| e^{i(k\omega t + \varphi_k)}\right) = |c_k| \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

on

$$\boxed{f(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(k\omega t + \varphi_k).}$$

Tämä on Fourier-sarjan **vaihekulmamuoto.**

3.2 Erityisaiheita

3.2.1 Jaksollisen funktion spektri

Fourier-sarjan avulla muodostetaan jaksolliselle funktiolle eli signaalille $f(t)$ taajuusalue-esitys, jota sanotaan funktion **spektriksi**. Tähän käytetään joko Fourier-sarjan *vaihekulmamuotoa* tai *eksponenttimuotoa*. Näistä

- vaihekulmamuoto antaa yksipuolisen esityksen: taajuus on ei-negatiivinen.
- eksponenttimuoto antaa kaksipuolisen esityksen: taajuus on sekä positiivinen että negatiivinen.

Seuraavassa tarkastellaan Fourier-esityksen eksponenttimuotoa.

Olkoon $f(t)$ funktio, jonka jaksona on T. Eksponenttimuotoisessa Fourier-sarjassa

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

funktio jaetaan eri taajuuskomponentteihin: Kerroin c_k esittää kuinka suuri paino taajuuskomponentilla $k\omega$ on.

Lukujonoa c_k, $k \in \mathbf{Z}$ sanotaan funktion *f* **spektriksi**. Koska luvut c_k ovat kompleksilukuja, esitetään spektri usein kahdessa osassa:

- **amplitudispektri**: $|c_k|$, $k \in \mathbf{Z}$
- **vaihespektri**: $\arg(c_k)$, $k \in \mathbf{Z}$

Vaihespektrissä $\arg(c_k)$:n arvot valitaan yleensä väliltä $[-\pi, \pi]$.

Koska $c_{-k} = \overline{c_k}$, on

$$|c_{-k}| = |c_k|$$

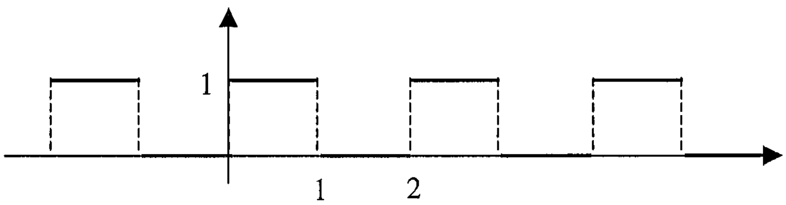
ja

$$\arg(c_{-k}) = -\arg(c_k).$$

Siis puolet spektristä (indeksi $k \geq 0$) sisältää kaiken tiedon funktiosta *f*.

ESIMERKKEJÄ

1. Muodosta kuvan funktion spektri.



Ratkaisu: Kappaleen 3.1.3 esimerkissä 1 on laskettu funktion eksponenttimuotoinen Fourier-sarja:

$$f(t) = \frac{1}{2} - i\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\pi t}.$$

Kerroin

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ kun } k = 0 \\ 0, \text{ kun } k \text{ parillinen, } k \neq 0 \\ \frac{-i}{k\pi}, \text{ kun } k \text{ pariton} \end{cases}$$

Amplitudispektri:

$$|c_0| = \frac{1}{2}$$

$$|c_k| = \begin{cases} 0, \text{ kun } k \text{ parillinen, } k \neq 0 \\ \frac{1}{|k|\pi}, \text{ kun } k \text{ pariton} \end{cases}$$

Vaihespektri:

$$\arg(c_0) = 0$$

$$\arg(c_k) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, \text{kun } k > 0 \text{ pariton} \\ \frac{\pi}{2}, \text{kun } k < 0 \text{ pariton} \end{cases}$$

3.2.2 Parsevalin yhtälö

Olkoon f funktio, jonka jakso on T. Funktion f **neliöllisellä keskiarvolla** tarkoitetaan integraalia

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)^2 \, dt .$$

Tätä kutsutaan **signaalin keskimääräiseksi tehoksi**. Tämä johtuu siitä, että jos $f(t)$ on virtapiirin lähdejännite tai virran voimakkuus, niin f:n neliöllinen keskiarvo on suoraan verrannollinen tehoon virtapiirissä.

Jos funktion f eksponenttimuotoinen Fourier-sarja on

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} ,$$

niin

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{ik\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c}_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Koska

$$c_{-k} = \overline{c_k} ,$$

saadaan

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_{-k}|^2 = |c_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 .$$

Jos a_k ja b_k ovat trigonometrisen Fourier-sarjan kertoimet, niin (ks. kappale 3.1.3)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k).$$

Täten

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} .$$

Kootaan tulokset **Parsevalin**[41] **yhtälöksi**:

$$\boxed{\langle f^2 \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}}$$

Tässä esiintyvät sarjat suppenevat, joten termien raja-arvot ovat nollia (ks. kappale 0.6):

[41] **Marc-Antoine Parseval** (1755-1836) oli ranskalainen matematiikko.

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0 .$$

Siis **Fourier-sarjan kertoimet lähestyvät nollaa.**

Koska Liitteen kaavoja käyttäen

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)^2 dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(a_k^2 \int_{t_0}^{t_0+T}\cos^2 k\omega t\, dt + 2a_k b_k \int_{t_0}^{t_0+T}\cos k\omega t \sin k\omega t\, dt + b_k^2 \int_{t_0}^{t_0+T}\sin^2 k\omega t\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(a_k^2 \frac{\pi}{\omega} + 0 + b_k^2 \frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{1}{T}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{a_k^2+b_k^2}{2} = \frac{a_k^2+b_k^2}{2}$$

voidaan Parsevalin yhtälö kirjoittaa seuraavasti:

Jaksollisen signaalin keskimääräinen teho on signaalin harmonisten komponenttien keskimääräisten tehojen summa.

Jos f on jännite tai sähkövirran voimakkuus, niin

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)^2 dx} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$$

on f:n **tehollisarvo**. Parsevalin yhtälön nojalla voidaan jaksollisen signaalin tehollisarvo määrittää Fourier-kertoimien avulla:

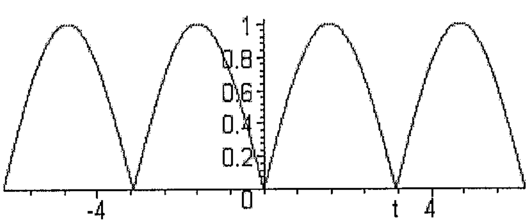
$$f_{rms} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2} = \sqrt{\frac{a_0{}^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k{}^2 + b_k{}^2}{2}} .$$

Signaalin keskimääräisen tehon jakautumista eri taajuuskomponenttien kesken voidaan havainnollistaa **tehospektrillä**, joka koostuu luvuista $|c_k|^2$.

ESIMERKKEJÄ

1. Tarkastellaan signaalia

$$f(t) = |\sin t| .$$



Signaalin jakso on $T = \pi$, jolloin

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2 .$$

Voidaan osoittaa, että signaalin eksponenttimuotoinen Fourier-sarja on

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-2}{(4k^2-1)\pi} e^{k\omega t} .$$

Siten tehospektri koostuu luvuista

$$|c_k|^2 = \frac{4}{(4k^2-1)^2\pi^2} .$$

Signaalin keskimääräinen teho

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = 0{,}5\,.$$

Parsevalin lauseen mukaan

$$\langle f^2 \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |c_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 = \frac{4}{\pi^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\left(4k^2-1\right)^2\pi^2}\,.$$

Ottamalla vakiotermi ja sarjan ensimmäinen termi saadaan

$$\frac{4}{\pi^2} + 2\frac{4}{9\pi^2} = 0{,}495348\,.$$

Siis vakiotermin ja ensimmäisen harmonisen komponentin osalle on keskittynyt signaalin tehosta

$$\frac{0{,}495348}{0{,}5}\cdot 100\% \approx 99\%\,.$$

HARJOITUSTEHTÄVÄT 3.2:

1. Määritä kappaleen 3.1.3 esimerkin 1 signaalin keskimääräinen teho.
2. Määritä kappaleen 3.1.3 esimerkin 1 signaalin tehospektri.
3. Kuinka monta prosenttia kappaleen 3.1.3 esimerkin 1 signaalin keskimääräisestä tehosta sisältyy vakiokomponenttiin ja signaalin kahteen ensimmäiseen nollasta poikkeavaan harmoniseen komponenttiin?

4. FOURIER-MUUNNOKSET

4.1 Perusasioita

4.1.1 Määritelmä

Olkoon $f(t)$ reaalimuuttujan t reaaliarvoinen funktio. Funktion $f(t)$ **Fourier-muunnoksella** tarkoitetaan reaalimuuttujan ω kompleksiarvoista funktiota

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt .$$

Jatkossa oletetaan, ellei toisin mainita, että funktio f toteuttaa **Dirichlet'n ehdot**:

- *Funktio on paloittain jatkuva ja jokaisella suljetulla välillä funktiolla on korkeintaan äärellinen määrä ääriarvoja.*
- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

Tällöin funktiolla $f(t)$ on Fourier-muunnos $F(\omega)$ olemassa.

Funktion $f(t)$ Fourier-muunnosta merkitään $\mathsf{F}[f(t)]$. Fourier-muunnoksen merkitsemiseen käytetään myös seuraavaa tapaa: muunnettavaa funktiota merkitään *pienellä kirjaimella* ja sen Fourier-muunnosta vastaavalla *isolla kirjaimella.*

Jos

$$F(\omega) = \mathsf{F}[f(t)],$$

niin merkitään

$$f(t) = \mathsf{F}^{-1}[F(\omega)]$$

ja sanotaan, että $f(t)$ on funktion $F(\omega)$ **Fourier-käänteismuunnos.**

Fourier-käänteismuunnos voidaan laskea **Fourier-integraalina:**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega .$$

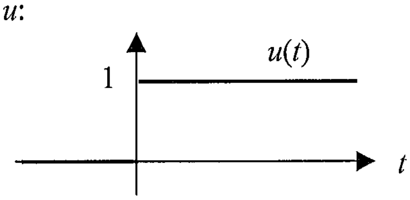
Funktiot $f(t)$ ja sen Fourier-muunnos $F(\omega)$ muodostavat **Fourier-muunnosparin**, jolle käytetään merkintää

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \text{tai} \quad F(\omega) \leftrightarrow f(t).$$

Seuraavissa esimerkeissä käytetään **yksikköaskel-funktiota** u:

$$u(t) = \begin{cases} 0, \text{ kun } t < 0 \\ 1, \text{ kun } t \geq 0 \end{cases}$$

Hyppäys 0:sta ykköseen tapahtuu siis hetkellä $t = 0$.



ESIMERKKEJÄ

1. Määritä $\mathsf{F}[e^{-at} u(t)]$, kun $a > 0$.

Ratkaisu: Lasketaan

$$\mathsf{F}\left[e^{-at}u(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(a+i\omega)t}\,dt$$

$$=\Big|_{0}^{\infty}-\frac{1}{a+i\omega}e^{-(a+i\omega)t}=0+\frac{1}{a+i\omega}=\frac{1}{a+i\omega}$$

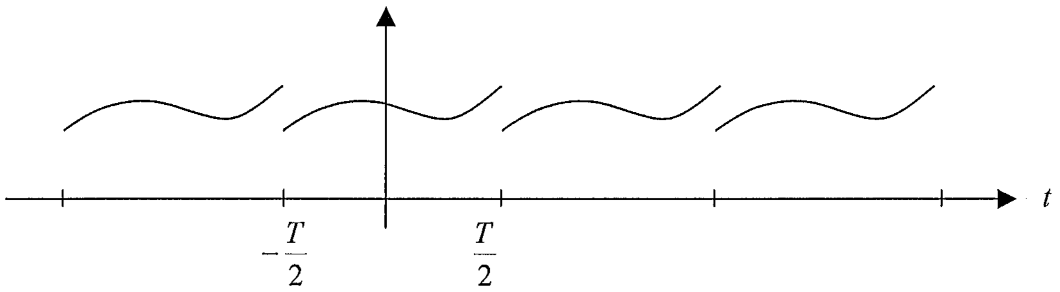
Siis

$$\mathsf{F}\left[e^{-at}u(t)\right]=\frac{1}{a+i\omega}.$$

4.1.2 Fourier-muunnos ja Fourier-sarja

Fourier-muunnosta voidaan pitää on jaksollisen funktion eksponenttimuotoisen Fourier-sarjan laajennuksena jaksottomille funktioille. Tarkastellaan tätä kysymystä tarkemmin.

Olkoon f reaaliakselilla määritelty funktio ja $T>0$. Otetaan funktiosta f välillä $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ oleva osa ja jatketaan näin saatu funktio T:n suuruisilla vaakasiirroilla T-jaksoiseksi funktioksi f_T.



Välin $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ leveyden T kasvaessa rajatta T-jaksoinen funktio f_T lähestyy jaksotonta funktiota f:

$$\lim_{T\to\infty}f_T(t)=f(t) \qquad (1)$$

kaikilla t.

Funktion f_T eksponenttimuotoinen Fourier-sarja on

$$f_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ik\omega t},$$

missä

$$c_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)e^{-ik\omega t}\,dt=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-ik\omega t}\,dt.$$

Yllä $\omega=\frac{2\pi}{T}$. Merkitään

$$\omega_k=k\frac{2\pi}{T},$$

jolloin kahden peräkkäisen kulmataajuuden erotus $\omega_{k+1} - \omega_k$ on

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Merkitään

$$F_T(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Tällöin

$$c_k = \frac{1}{T}F_T(\omega_k)$$

joten funktion f_T eksponenttimuotoinen Fourier-sarja voidaan kirjoittaa muotoon

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}F_T(\omega_k)e^{i\omega_k t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_T(\omega_k)e^{i\omega_k t}\frac{2\pi}{T}.$$

Koska $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, saadaan

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_T(\omega)e^{i\omega_k t}\Delta\omega \tag{2}$$

Kun $T \to \infty$, niin selvästikin

$$F_T(\omega) \to F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Summa

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_T(\omega_k)e^{i\omega_k t}\Delta\omega$$

on integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_T(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

ääretön Riemannin summa. Kun $T \to \infty$, niin $\Delta\omega \to 0$. Voidaan osoittaa, että Dirichlet'n ehtojen ollessa voimassa

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_T(\omega_k)e^{i\omega_k t}\Delta\omega \to \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \tag{3}$$

Otetaan nyt raja-arvo yhtälön (2) molemmista puolista, kun $T \to \infty$. Käyttämällä hyväksi raja-arvoja (1) ja (3) päädytään **Fourier-integraaliin**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

missä

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

4.1.3 Spektri

Integraali

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

esittää funktion $f(t)$ jaon eri taajuuksille ω. Käytettäessä integraalin pienten differentiaalien mukaista tulkintaa taajuuskomponentin $e^{i\omega t}$ kerroin on $\frac{F(\omega)}{2\pi}d\omega$. Taajuuden ω vaikutus riippuu siis täysin Fourier-muunnoksesta $F(\omega)$, joka on oikeastaan *spektrin tiheys* taajuuskaistaa $df=\frac{d\omega}{2\pi}$ kohden.

Fourier-muunnosta $F(\omega)$ sanotaan signaalin $f(t)$ **spektriksi**. Tämä on kompleksiarvoinen funktio. Spektri esitetään usein esittämällä muuttujan ω funktiona

- **amplitudispektri** $|F(\omega)|$
- **vaihespektri** $\arg(F(\omega))$.

Koska

$$\overline{F(\omega)}=\overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t}dt=F(-\omega),$$

on *amplitudispektri parillinen funktio*

$$|F(-\omega)|=|F(\omega)|$$

ja *vaihespektri pariton funktio*

$$\arg(F(-\omega))=-\arg(F(\omega)).$$

Tämän mukaan jo puolet spektristä sisältää kaiken informaation funktiosta $f(t)$.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritä $f(t)=e^{-at}u(t)$, ($a>0$) amplitudi ja vaihespektri.

   Ratkaisu: Kappaleen 4.1.1 esimerkissä 1 laskettiin funktion Fourier-muunnos:

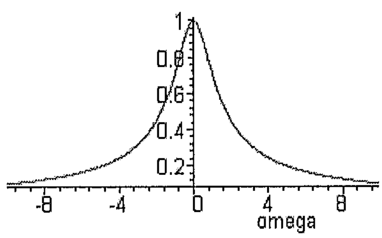
$$F(\omega)=\frac{1}{a+i\omega}.$$

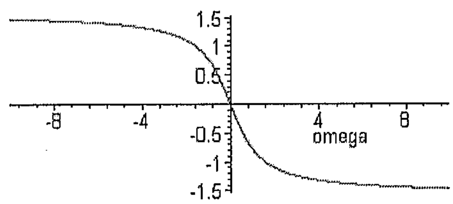
Siten amplitudispektri on

$$|F(\omega)|=\frac{1}{|a+i\omega|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

ja vaihespektri on

$$\arg(F(\omega))=-\arg(a+i\omega)=-\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right).$$





Oheisissa kuvissa nämä on piirretty, kun $a = 1$.

4.2 Ominaisuudet

Kuten Laplace- ja z-muunnokset, määritetään Fourier-muunnokset käytännössä seuraavilla tavoilla:

- Käytetään *muunnostaulukoita*, joista löytyy *perusfunktioiden Fourier-muunnokset*. Muiden funktioiden Fourier-muunnokset johdetaan käyttäen *Fourier-muunnosten laskusääntöjä*.
- Käytetään *tietokoneohjelmia* tai *laskimia*. Tällöinkin on tunnettava Fourier-muunnosten perusominaisuudet.

Tässä kappaleessa esitetään yleisimmät laskusäännöt ja joidenkin perusfunktioiden Fourier-muunnokset.

4.2.1 Laskusäännöt

Seuraavaan taulukkoon on koottu Fourier-muunnosten laskusäännöt. Taulukossa kirjaimet a ja b ovat vakioita.

No	$f(t)$	$F(\omega)$	Nimitys
S1	$af(t)+bg(t)$	$aF(\omega)+bG(\omega)$	Lineaarisuus
S2	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	Skaalaus
S3	$f(t-t_0)$	$e^{-i\omega t_0}F(\omega)$	Aikaviive
S4	$e^{i\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega-\omega_0)$	Taajuusmodulaatio
S5	$f'(t)$	$i\omega F(\omega)$	Derivaatan muunnos[42]

Soveltamalla sääntöä S5 toistuvasti saadaan:

$$\boxed{f^{(n)}(t) \leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega)}$$

Todistetaan joitain näistä säännöistä:

<u>Sääntö 1:</u> Integraalin lineaarisuuden perusteella

$$af(t)+bg(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}(af(t)+bg(t))e^{-i\omega t}dt = a\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt + b\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt = aF(\omega)+bG(\omega)$$

<u>Sääntö 3:</u> Käyttämällä Fourier-käänteismuunnoksen laskentakaavaa saadaan

[42] Derivaatan f' on toteutettava Dirichlet'n ehdot.

$$e^{-i\omega t_0}F(\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t_0}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega(t-t_0)}d\omega = f(t-t_0)$$

Sääntö 4:

$$e^{i\omega_0 t}f(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t}f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt = F(\omega-\omega_0)$$

Sääntö 5: Voidaan osoittaa, että

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$$

Osittaisintegrointia käyttäen saadaan

$$f'(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}dt = \Big|_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = i\omega F(\omega)$$

Johdetaan lopuksi **duaalisuusperiaate.**

Olkoon

$$F(\omega) = \mathsf{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Tällöin

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Siten

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \mathsf{F}[F(\omega)].$$

Tätä ominaisuutta sanotaan Fourier-muunnoksen **duaalisuudeksi**:

Jos $F(\omega)$ on funktion $f(t)$ Fourier-muunnos, niin $2\pi f(-\omega)$ on funktion $F(t)$ Fourier-muunnos:
$\mathsf{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow 2\pi f(-\omega) = \mathsf{F}[F(t)]$.

ESIMERKKEJÄ

1. Osoita, että jos

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega),$$

niin

$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}F(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega+\omega_0).$$

Ratkaisu: Eulerin kaavasta seuraa, että

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right).$$

Sääntöä S4 käyttäen saadaan

$$f(t)\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}e^{i\omega_0 t}f(t) + \frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t}f(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)$$

2. **Sovellus: Amplitudimodulaatio.** Amplitudimodulaatiossa signaali $f(t)$ siirretään moduloimalla kantoaallon

   $$k(t) = \cos\omega_0 t$$

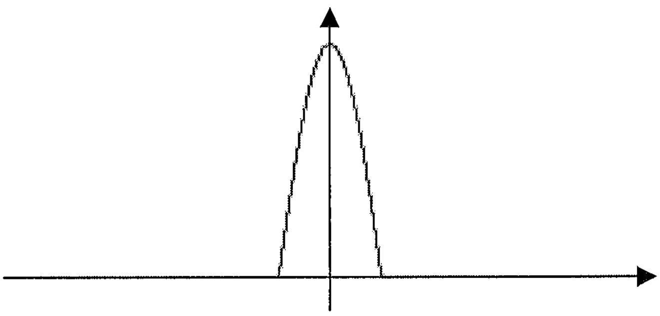
   amplitudia signaalilla $f(t)$. Moduloitu signaali on tällöin

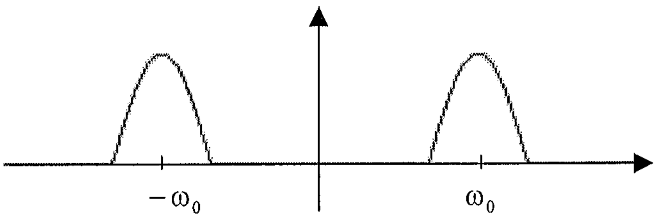
   $$m(t) = f(t)\cos\omega_0 t.$$

   Jos signaalin $f(t)$ Fourier-muunnos on $F(\omega)$, on esimerkin 1 mukaan moduloidun signaalin Fourier-muunnos

   $$M(\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2}F(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega+\omega_0).$$

   Siis signaalin $f(t)$ spektri siirtyy taajuuden ω_0 ympäristöön.





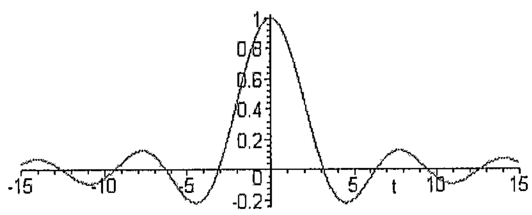
   Käyttämällä erilaisia kantoaallon taajuuksia ω_0, voidaan samaa siirtokanavaa pitkin siirtää samanaikaisesti useita eri signaaleja.

4.2.2 Funktioiden Fourier-muunnoksia

Tämän kappaleen esimerkeissä lasketaan joidenkin funktioiden Fourier-muunnoksia. Laskuissa käytetään hyväksi Fourier-muunnoksen määritelmää ja Fourier-muunnossääntöjä.

Esimerkeissä käytetään **sinc-funktiota**:

$$\operatorname{sinc} t = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & \text{kun } t \neq 0 \\ 1 \quad , & \text{kun } t = 0 \end{cases}$$



Koska

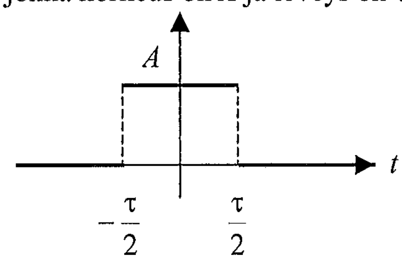
$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1,$$

on sinc-funktio jatkuva origossa ja siis kaikkialla.

ESIMERKKEJÄ

1. **Sakarapulssin Fourier-muunnos.** Sakarapulssi on yleisesti käytetty aikarajoitetun signaalin malli.

   Tarkastellaan kuvan mukaista *symmetristä sakarapulssia*, jonka korkeus on A ja leveys on τ:



$$f(t)=\begin{cases} A, \text{ kun } |t|\le \frac{\tau}{2} \\ 0, \text{ muulloin}\end{cases}$$

Jos $\omega \neq 0$, niin

$$\mathsf{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-i\omega t}\,dt = A\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} -\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t}$$

$$=\frac{A}{i\omega}\left(e^{i\frac{\omega\tau}{2}}-e^{-i\frac{\omega\tau}{2}}\right)=\frac{A}{i\omega}2i\sin\frac{\omega\tau}{2}=\frac{2A}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}$$

$$=A\tau\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

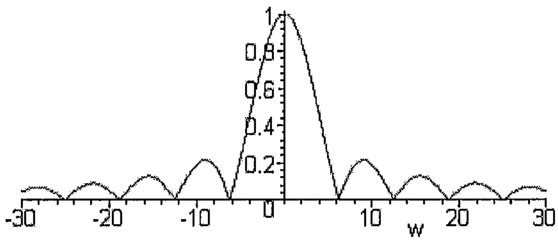
Jos $\omega = 0$, niin

$$\mathsf{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A\,dt = A\tau .$$

Sakarapulssin Fourier-muunnos voidaan kirjoittaa sinc-funktion avulla seuraavasti:

$$\mathsf{F}[f(t)]=A\tau\operatorname{sinc}\frac{\omega\tau}{2}.$$

Oheisessa kuvassa on sakarapulssin amplitudispektri, kun $A=1$ ja $\tau=1$.



2. Määritä $\mathsf{F}\left[e^{-a|t|}\right]$, kun $a>0$.

   Ratkaisu: Fourier-muunnos voidaan määrittää suoraan integroimalla tai käyttämällä seuraavaa yhtälöä:

$$e^{-a|t|}=e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t).$$

Koska

$$\mathsf{F}\left[e^{-at}u(t)\right] = \frac{1}{a+i\omega},$$

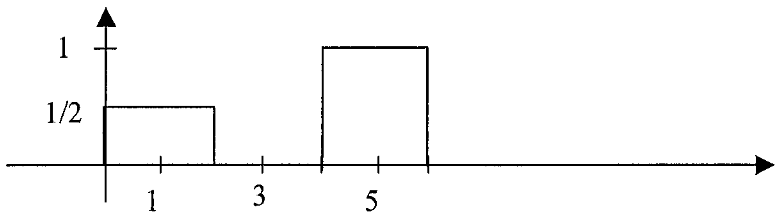
on Säännön S2 perusteella

$$\mathsf{F}\left[e^{at}u(-t)\right] = \frac{1}{a-i\omega}.$$

Siis Fourier-muunnoksen lineaarisuuden perusteella

$$\mathsf{F}\left[e^{-a|t|}\right] = \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

3. Muodosta oheisen kuvan mukaisen signaalin $f(t)$ Fourier-muunnos.



Ratkaisu: Signaali $f(t)$ voidaan esittää symmetrisen sakarapulssin

$$g(t) = \begin{cases} 1, \text{kun } t < 1 \\ 0, \text{muulloin} \end{cases}$$

avulla seuraavasti:

$$f(t) = \frac{1}{2}g(t-1) + g(t-5).$$

Esimerkin 1 mukaan ($\tau = 2$)

$$\mathsf{F}[g(t)] = 2\mathrm{sinc}(\omega).$$

Siten sääntöä S3 käyttäen saadaan

$$\begin{aligned}\mathsf{F}[f(t)] &= \frac{1}{2}\mathsf{F}[g(t-1)] + \mathsf{F}[g(t-5)] = \frac{1}{2}2e^{-i\omega}\mathrm{sinc}(\omega) + e^{-i5\omega}2\mathrm{sinc}(\omega) \\ &= \left(e^{-i\omega} + 2e^{-i5\omega}\right)\mathrm{sinc}(\omega)\end{aligned},$$

4.3 Parsevalin yhtälö

Fourier-sarjojen yhteydessä johdettiin T-jaksoiselle funktiolle $f(t)$ Parsevalin yhtälö

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2,$$

jonka mukaan signaalin *keskimääräinen teho* voidaan laskea signaalin spektristä.

Jaksottoman funktion tapauksessa keskimääräisen tehon käsite ei ole mielekäs, jos signaali ei häviä äärellisen välin ulkopuolella. Tämä johtuu siitä, että nimittäjä tulee äärettömäksi ja teho nollaksi. Jaksottomien signaalien yhteydessä käytetäänkin **energian** käsitettä, joka määritellään yhtälöllä

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 \, dt .$$

Tarkastellaan nyt jaksotonta funktiota $f(t)$, joka toteuttaa Dirichlet'n ehdot ja jolle

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 \, dt < \infty .$$

Käyttämällä kaavaa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) f(t) e^{i\omega t} \, d\omega \, dt$$

Vaihtamalla tässä integroimisjärjestys[43] saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) f(t) e^{i\omega t} \, dt \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} \, dt \, d\omega .$$

Koska

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt ,$$

on

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \overline{F(\omega)} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega .$$

Näin on päädytty **Parsevalin yhtälöön**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega}$$

Parsevalin yhtälön mukaan signaalin energia voidaan laskea amplitudispektristä

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega .$$

Funktio $|F(\omega)|^2$ kuvaa signaalin **energian spektritiheyttä**. Sitä sanotaan signaalin **energiaspektriksi**. Signaalin energia taajuusvälillä $[-\omega_1, \omega_1]$ voidaan laskea integraalilla

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\omega_1} |F(\omega)|^2 \, d\omega .$$

ESIMERKKEJÄ

1. **Sakarapulssin energia.** Tarkastellaan sakarapulssia

[43] Voidaan osoittaa, että integroimisjärjestyksen saa vaihtaa.

$$g(t) = \begin{cases} 1, \text{kun } t < 1 \\ 0, \text{muulloin} \end{cases}$$

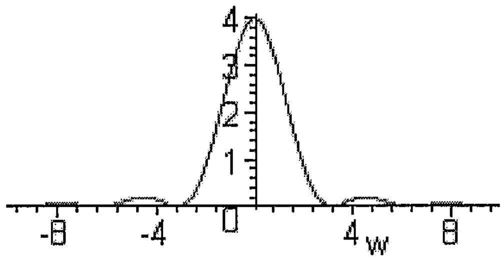
Signaalin energia

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)^2\, dt = \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2.$$

Kappaleen 4.2.2 esimerkin 1 mukaan signaalin $g(t)$ Fourier-muunnos on ($\tau = 2$)

$$G(\omega) = 2\mathrm{sinc}(\omega).$$

Kuvassa on signaalin energiaspektri



Parsevalin yhtälön mukaan myös

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |G(w)|^2\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\, d\omega = 2$$

Energiaspektrin pääpulssi on välillä $[-\pi, \pi]$. Tämän taajuusvälin energia on

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |G(w)|^2\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\, d\omega = 1{,}8056,$$

joka on noin 90,28% koko signaalin energiasta.

LIITTEET

1. Sinin ja kosinin integraaleja

Tässä liitteessä esitetään joitain sinin ja kosinin integraaleja, joita tarvitaan Fourier-sarjan kertoimia määritettäessä. Integrointikaavat 1-2 saadaan suoraan laskemalla integraali. Integrointikaavojen 3-5 johtamisessa voidaan käyttää seuraavia trigonometrian kaavoja:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$$

Jos $\omega \neq 0$ sekä k ja n ei-negatiivisia kokonaislukuja, niin

1. $$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin k\omega x \, dx = 0$$

2. $$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos k\omega x \, dx = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\omega}, \text{ kun } k = 0 \\ 0, \quad \text{kun } k \neq 0 \end{cases}$$

3. $$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin k\omega x \sin n\omega x \, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\omega}, \quad \text{kun } k = n \neq 0 \\ 0, \quad \text{kun } k \neq n \text{ tai } k = n = 0 \end{cases}$$

4. $$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos k\omega x \cos n\omega x \, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\omega}, \quad \text{kun } k = n \neq 0 \\ \dfrac{2\pi}{\omega}, \text{ kun } k = n = 0 \\ 0, \quad \text{kun } k \neq n \end{cases}$$

5. $$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos k\omega x \sin n\omega x \, dx = 0$$

2. Fourier-sarjan kertoimet

Olettaen, että sarja

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t\right)$$

voidaan integroida termeittäin, johdetaan kertoimien $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ja $b_1, b_2, \ldots$ laskukaavat. Funktion f jakso

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

jolloin

$$\frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}.$$

<u>Kerroin</u> a_0:

Käyttäen integraalikaavoja 1 ja 2 saadaan

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)\right]dt$$

$$= \int_0^T \frac{a_0}{2}\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a_k \cos k\omega t\,dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} b_k \sin k\omega t\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 T$$

Siis

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx.$$

<u>Kerroin</u> a_n, $n > 0$:

Kertomalla lauseke $\cos n\omega t$ summan sisään ja ottamalla integraali erikseen yhteenlaskettavista saadaan

$$\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt = \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)\right]\cos n\omega t\,dt$$

$$= \int_0^T \frac{a_0}{2}\cos n\omega t\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a_k \cos k\omega t \cos n\omega t\,dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} b_k \sin k\omega t \cos n\omega t\,dt\right)$$

Käyttämällä integraalikaavoja 2, 4 ja 5 saadaan

$$\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{\pi}{\omega}a_n = \frac{T}{2}a_n$$

Siis

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt.$$

<u>Kerroin</u> b_n, $n > 0$:

Kertomalla lauseke $\sin n\omega t$ summan sisään ja ottamalla integraali erikseen yhteenlaskettavista saadaan

$$\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt = \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t\right)\right] \sin n\omega t\, dt$$

$$= \int_0^T \frac{a_0}{2} \sin n\omega t\, dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a_k \cos k\omega t \sin n\omega t\, dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} b_k \sin k\omega t \sin n\omega t\, dt\right)$$

Käyttämällä integraalikaavoja 1, 3 ja 5 saadaan

$$\int_0^T f(t)\sin n\omega t\, dt = \frac{\pi}{\omega} b_n = \frac{T}{2} b_n$$

Siis

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\, dt .$$

HAKEMISTO