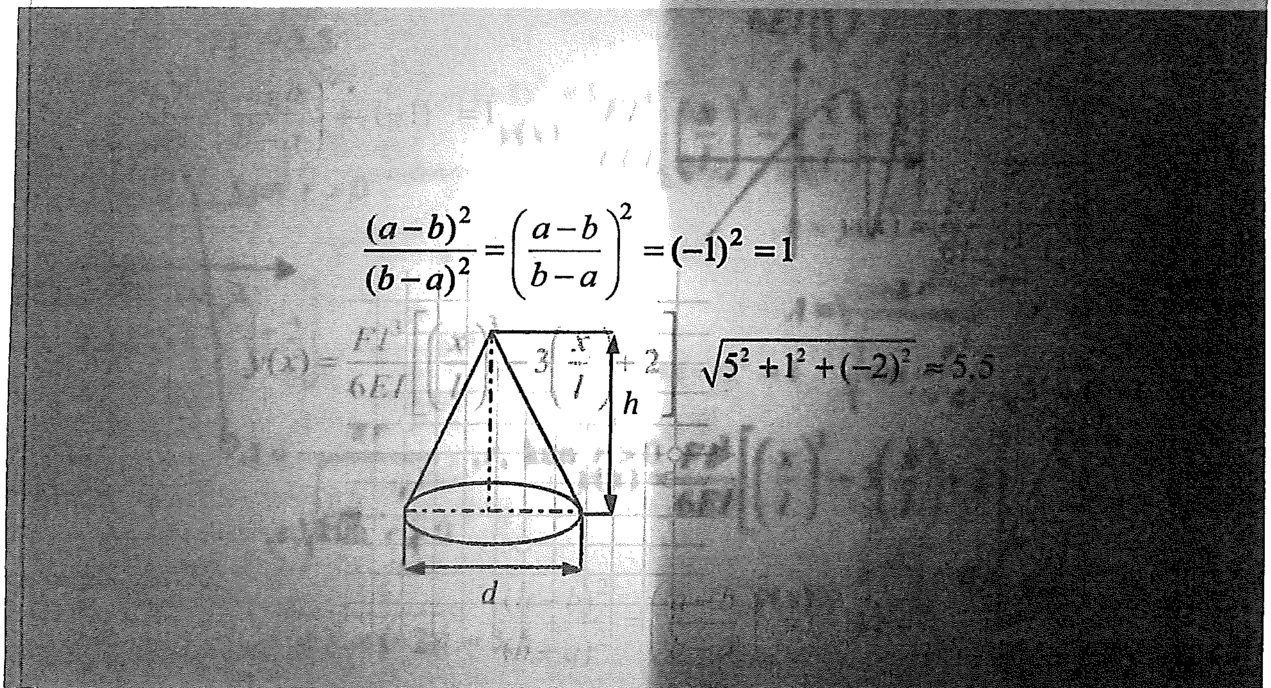
SIRPA ALESTALO PASI LEHTOLA TOMI NIEMINEN ANNE RANTAKAULIO

Tekninen matematiikka 1



Tammertekniikka

Sirpa Alestalo   Pasi Lehtola   Tomi Nieminen   Anne Rantakaulio

Tekninen matematiikka 1

1. uusittu painos (2011)

Tammertekniikka

YHTEYSTIEDOT

Tilaukset ja tiedustelut
Amk-Kustannus Oy Tammertekniikka, Tampere
Puh. (050) 585 4930
Fax (03) 2530 306
Sähköposti tilaukset@tammertekniikka.fi

www.tammertekniikka.fi

Kustantaja: Amk-Kustannus Oy Tammertekniikka
2. uusittu painos, 2011

ISBN 978-952-5491-70-8

Bookwell Oy
Porvoo, 2019

Alkusanat

Tämä kirja on tarkoitettu insinöörikoulutuksen matematiikan opiskelun alkuosan kurssimateriaaliksi. Tavoitteena on ollut, että kirjassa olisi riittävästi teoriaa ja perustehtäviä ammatillisen koulutuksen saaneille ja toisaalta kyllin haastavia tehtäviä lukiopohjaisille opiskelijoille. Tehtävien joukossa on runsaasti käytäntöön liittyviä tehtäviä, jotka motivoivat opiskelijaa itseopiskeluun. Kirja on ollut käytössä ammattikorkeakouluissa jo useita vuosia.

Oppikirjan uudistettu painos kirjoitettiin matematiikan opettajilta kerätyn palautteen perusteella. Teoriaosuutta on pyritty kehittämään niin, että se olisi helpommin opiskelijan omaksuttavissa. Opiskelijalta ei oleteta esitietoja matematiikasta, vaan kirja alkaa lukujen laskusäännöistä. Kirjaan on myös lisätty seuraavat oleelliset tekniikan matematiikan osa-alueet: trigonometria, vektorit ja matriisit.

Jyväskylässä toukokuussa 2011

Tekijät

SISÄLLYSLUETTELO

1 **LUVUT** 3

1.1 POHJATIETOA 3
1.2 LUKUJOUKOT 3
1.3 LASKUTOIMITUKSET JA LASKUJÄRJESTYS 7
1.4 SUUREET JA SYMBOLIT 11
1.5 KYMMENPOTENSSIMUOTO, ETULIITTEET JA YKSIKÖNMUUNNOKSET 11
1.6 TARKKUUS JA PYÖRISTÄMINEN 14

2 **LAUSEKKEET** 19

2.1 PERUSKÄSITTEITÄ 19
2.2 POTENSSIT JA JUURET 20
2.2.1 Kokonaislukupotenssit 20
2.2.2 Juuret 25
2.2.3 Yleinen potenssi 28
2.3 POLYNOMIT 29
2.3.1 Polynomin käsite 29
2.3.2 Polynomien laskutoimitukset 30
2.3.3 Polynomin jako tekijöihin 32
2.3.4 Rationaalilausekkeet 34
2.4 LOGARITMI 39
2.5 LAUSEKKEEN MUODOSTAMINEN KÄYTÄNNÖN TEHTÄVÄSTÄ 44
2.6 KOORDINAATISTO 46

3 **YHTÄLÖT** 52

3.1 YHTÄLÖN KÄSITE 52
3.2 YHTÄLÖNRATKAISUN PERIAATTEITA 55
3.3 LINEAARISEEN MUOTOON PALAUTUVAT YHTÄLÖT 62
3.4 TOISEN ASTEEN POLYNOMIYHTÄLÖT 66
3.5 KORKEAMMAN ASTEEN POLYNOMIYHTÄLÖT 73
3.6 YHTÄLÖN MUODOSTAMINEN 75
3.6.1 Sanalliset tehtävät 75
3.6.2 Verranto 80
3.6.3 Verrannollisuus 82
3.6.4 Mittakaava ja yhdenmuotoisuus 85
3.6.5 Prosenttilaskut 87
3.7 JUURIA SISÄLTÄVÄT YHTÄLÖT 92
3.8 EKSPONENTTIYHTÄLÖT 94
3.9 LOGARITMIYHTÄLÖT 98
3.10 YHTÄLÖRYHMÄT 102
3.11 EPÄYHTÄLÖT 111

4 **TRIGONOMETRIA** 116

4.1 PERUSKÄSITTEET 116
4.2 PYTHAGORAAN LAUSE 116
4.3 ASTEET JA RADIAANIT 117
4.4 TRIGONOMETRISET FUNKTIOT TERÄVÄLLE KULMALLE 118
4.5 TRIGONOMETRISET FUNKTIOT YLEISELLE KULMALLE 119
4.6 VINOKULMAISEN KOLMION RATKAISEMINEN 120

5 **VEKTORIT** 126

5.1 PERUSKÄSITTEITÄ 126
5.2 VEKTOREIDEN LASKUTOIMITUKSIA 127
5.2.1 Vektoreiden yhteenlasku 127
5.2.2 Vektorin kertominen luvulla 129
5.2.3 Vektoreiden erotus 130
5.3 VEKTORIN JAKAMINEN KOMPONENTTEIHIN 131
5.4 STATIIKAN SOVELLUKSET 133
5.5 VEKTORIN KOORDINAATTIESITYS 135
5.6 AVARUUSVEKTORIT 137
5.7 PISTETULO JA RISTITULO 137

6 FUNKTIOT **143**

6.1 PERUSKÄSITTEITÄ 143
6.2 POLYNOMIFUNKTIOT 150
6.2.1 Ensimmäisen asteen polynomifunktio 150
6.2.2 Toisen asteen polynomifunktio 156
6.2.3 Korkeamman asteen polynomifunktiot 161
6.3 YKSINKERTAISIA RATIONAALIFUNKTIOITA 164
6.4 EKSPONENTTIFUNKTIO 167
6.5 LOGARITMIFUNKTIO 170
6.6 SINIFUNKTIO 174
6.7 MUITA FUNKTIOITA 181
6.8 YHTÄLÖN GRAAFINEN JA NUMEERINEN RATKAISEMINEN 183

7 MATRIISIT **187**

7.1 PERUSKÄSITTEITÄ 187
7.2 MATRIISIEN LASKUTOIMITUKSET 188
7.3 DETERMINANTTI JA KÄÄNTEISMATRIISI 196
7.4 YHTÄLÖRYHMÄN RATKAISEMINEN KÄÄNTEISMATRIISIN AVULLA 200

8 KOMPLEKSILUVUT **204**

8.1 KOMPLEKSILUVUT YHTÄLÖN JUURINA 204
8.2 KOMPLEKSILUVUILLA LASKEMINEN 207
8.3 KOMPLEKSILUVUN KULMA- JA EKSPONENTTIMUOTO 212
8.4 OSOITINLASKENTA 216

Liite 1: Laskimen T89 käyttö

Tulokset

1 LUVUT

1.1 POHJATIETOA

Tämän luvun ymmärtämiseksi tulee aiemmista opinnoista muistaa:

- potenssi, merkintä $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\,\text{kpl}}$
  luku a on kantaluku ja n eksponentti
  esim. $5^2 = 5 \cdot 5$

- neliöjuuri, $\sqrt{a} = b$, jos $b^2 = a$ (a ja b eivät saa olla negatiivisia)
  esim. $\sqrt{36} = 6$, sillä $6^2 = 36$

- pyöristäminen ilmaistaan $\approx$ -merkillä
  esim. $\pi = 3{,}141592653\ldots \approx 3{,}14$

- merkit
  $<$ pienempi kuin
  $\leq$ pienempi tai yhtä suuri kuin
  $>$ suurempi kuin
  $\geq$ suurempi tai yhtä suuri kuin
  esim. $3 < 5$, 3 on pienempi kuin 5

1.2 LUKUJOUKOT

Arkielämässä käytetään monia erityyppisiä lukuja. Lukumääriä laskettaessa käytetään positiivisia kokonaislukuja 1, 2, 3,.... Jos eletään yli varojen tai ulkona on pakkasta, asiaa kuvataan negatiivisilla luvuilla (tilin saldo –200 € tai lämpötila –8 °C). Kun kokonaisuuksia jaetaan osiin, käytetään murtolukuja (½ banaania, ⅓ ryhmästä). Joskus käytetään lukuja, joita ei voida kirjoittaa murtolukuina eli kahden kokonaisluvun osamääränä. Tällainen on esimerkiksi ympyrän pinta-alan laskemiseen tarvittava luku π. Matemaattisesti erityyppiset luvut on koottu lukujoukoiksi.

Lukujoukot *Luonnolliset luvut* $\mathbf{N} = \{1, 2, 3,\ldots\}$ tai $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3,\ldots\}$

Kokonaisluvut $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Rationaaliluvut $\mathbf{Q}$. Rationaaliluvut ovat muotoa $\frac{m}{n}$, missä m ja n ovat kokonaislukuja ja $n \neq 0$. Kaikki rationaaliluvut voidaan siis kirjoittaa murtolukuna. Desimaalilukuna rationaaliluku on joko päättyvä tai jaksollinen.

Reaalilluvut **R** . Reaaliluvut muodostuvat rationaaliluvuista ja *irrationaaliluvuista*. Irrationaaliluvulla tarkoitetaan päättymätöntä, jaksotonta desimaalilukua, jota ei voida esittää murtolukuna, esim. $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ ja $\pi = 3{,}141592653\ldots$

Joskus halutaan käsitellä vain positiivisia tai vain negatiivisia lukuja. Tällöin rajaus ilmoitetaan alaindeksillä:

positiiviset kokonaisluvut $\mathbf{Z}_{+} = \{\,1, 2, 3, \ldots\}$
negatiiviset kokonaisluvut $\mathbf{Z}_{-} = \{\ldots, -3, -2, -1\}$
positiiviset reaaliluvut $\mathbf{R}_{+}$, *negatiiviset reaaliluvut* $\mathbf{R}_{-}$

Luvussa 8 esitellään vielä kompleksiluvut, joiden joukko sisältää reaaliluvut.

Sana luku tarkoittaa useimmiten reaalilukua. Sekamurtolukuja ei tekniikassa käytetä. Siis kirjoitetaan $\frac{7}{3}$ eikä $2\frac{1}{3}$. Käytännössä murtoluku ilmoitetaan usein desimaalimuodossa 2,333... . Desimaalierotin on Suomessa pilkku, vaikka tietokoneissa ja laskimissa on usein käytössä desimaalipiste Amerikan tapaan.

Reaalilukuja voidaan havainnollistaa lukusuoran pisteinä.

-2,3 $-\frac{2}{3}$ $\sqrt{2}$ π

-3 -2 -1 0 1 2 3 4

Vastaluku Luvun *vastaluku* saadaan lisäämällä luvun eteen miinusmerkki. Luvun a vastaluku on $-a$. Jos a on negatiivinen, niin $-a$ on positiivinen.

Vastaluvut ovat lukusuoralla yhtä etäällä nollasta. $-3 \quad 0 \quad 3$
Siten vastalukujen summa on 0 eli $a + (-a) = 0$.

Esim. 1.1 a) Luvun 5 vastaluku on -5.
b) Luvun $-2{,}3$ vastaluku on $-(-2{,}3) = 2{,}3$.
c) Luvun 0 vastaluku on $-0 = 0$.

Käänteisluku Luvun a *käänteisluku* on $\frac{1}{a}$, jos $a \neq 0$.
Käänteislukujen tulo on 1 eli $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Käänteislukua voi merkitä myös a^{-1}.
Tämä on monissa laskimissa käänteisluvun merkintätapa.

Esim. 1.2 Luvun 5 käänteisluku on $\frac{1}{5}$ ja luvun $-\frac{2}{3}$ käänteisluku on $\dfrac{1}{-\frac{2}{3}} = -\dfrac{3}{2}$.

$\in$ -merkki Kuuluminen johonkin joukkoon ilmaistaan $\in$ -merkillä. Vastaavasti käytetään $\notin$ -merkkiä, jos luku ei kuulu joukkoon.

Esim. 1.3 a) Merkintä $x \in \mathbf{R}$ tarkoittaa, että x kuuluu reaalilukuihin.

b) Merkintä $\pi \notin \mathbf{Z}$ tarkoittaa, että π ei ole kokonaisluku.

Ääretön Matematiikassa käsite ääretön tarkoittaa kaikkia reaalilukuja suurempaa lukua. Tätä merkitään symbolilla ∞. Vastaavasti lukua, joka on pienempi kuin kaikki reaaliluvut, merkitään $-\infty$.

Symbolilla ∞ ei voi laskea, joten ääretön ei samanlainen luku kuin reaaliluvut. Esimerkiksi laskutoimitukset $\infty + (-\infty)$ ja $\frac{\infty}{\infty}$ ovat mahdottomia.

Reaali-lukuvälit Reaalilukuvälit ovat reaalilukujen osajoukkoja.

Suljettu väli: väli, jossa päätepisteet ovat mukana. Merkintä $[a,b]$ tarkoittaa kaikkia lukuja luvusta a lukuun b rajat mukaan lukien

a b

Puoliavoin väli: väli, jossa vain toinen päätepiste on mukana. Merkintä $]\,a,b]$ tarkoittaa, että alkupiste a ei ole mukana, mutta loppupiste b on.

a b

Merkintä $[a,b[$ tarkoittaa, että alkupiste a kuuluu väliin, loppupiste b ei kuulu mukaan.

a b

Avoin väli: väli, jossa kumpikaan päätepiste ei ole mukana $]\,a,b\,[$

a b

Ääretön väli: väli, jonka toinen päätepiste on äärettömän kaukana. Esimerkiksi $[a, \infty[$ tarkoittaa kaikkia lukuja, jotka ovat vähintään a, eli $x \geq a$.

a

Esim. 1.4 Miten merkitään, että x kuuluu annetulle välille?

a)

3 7

Ratkaisu. Tapa 1: $3 \leq x \leq 7$, tapa 2: $x \in [\,3\,,7\,]$

b)

−1 4

Ratkaisu. Tapa 1: $-1 < x \leq 4$, tapa 2: $x \in]-1, 4]$

c)

−3 2

Ratkaisu. Tapa 1: $x \leq -3$ tai $x > 2$, tapa 2: $x \in]-\infty, -3]$ tai $x \in [2, \infty[$

Itseisarvo

Reaaliluvun *a* *itseisarvo* $|a|$ tarkoittaa luvun *a* etäisyyttä nollasta lukusuoralla.

$$|a| = \begin{cases} a\ , & \text{kun } a \geq 0 \\ -a, & \text{kun } a < 0 \end{cases}$$

ts. itseisarvo on luku itse, jos luku on 0 tai positiivinen ja luvun vastaluku, jos luku on negatiivinen.

Esim. 1.5

a) $|5| = 5$ ja $|-5| = 5$, sillä molemmat luvut 5 ja − 5 ovat 5 yksikön etäisyydellä nollasta

−5 0 5

5 5

b) $|\pi - 2| = \pi - 2 \approx 1{,}14$

c) $|\pi - 4| = -(\pi - 4) = 4 - \pi \approx 0{,}86$

π - 4 0 π - 2

0,86 1,14

Harjoitustehtäviä

1.1 Sijoita lukusuoralle järjestykseen luvut π , -2π, $\pi - 1$, $\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{1}{\pi}$.

1.2 Mitkä seuraavista luvuista 100; -5; 1,5; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{1}{5}$ ja 0 ovat a) parillisia b) parittomia c) positiivisia d) negatiivisia e) kokonaislukuja f) murtolukuja g) reaalilukuja?

1.3 Merkitse lyhyemmin
a) *k* on ei-negatiivinen kokonaisluku,
b) *R* (resistanssi) on positiivinen,
c) *d* voi saada arvoja − 0,5 metristä 0,5 metriin.

1.4 Luettele lukujen 6, -½, $\frac{4}{11}$, 2,25 ja $\frac{a}{b}$ vastaluvut ja käänteisluvut.

1.5 Kuinka suuri on lukujen 15 ja −7 itseisarvojen summan ja summan itseisarvon erotus?

1.6 Merkitse, että x kuuluu annetuille väleille

a)

0 6

b)

-1

c)

-10 -7 1 5

1.3 LASKUTOIMITUKSET JA LASKUJÄRJESTYS

Luvuilla laskettaessa kannattaa muistaa laskutoimitusten käänteisyys, sillä tuloksen voi tarkistaa käänteisellä laskutoimituksella. Toisilleen käänteisiä laskutoimituksia ovat

yhteenlasku – vähennyslasku
kertolasku – jakolasku
potenssiin korotus – juuren otto

Esim. 1.6

a) $5 - 1{,}7 = 3{,}3$ (tarkistus: $3{,}3 + 1{,}7 = 5$)
b) $\frac{100}{8} = 12{,}5$ (tarkistus: $8 \cdot 12{,}5 = 100$)
c) $\sqrt{16} = 4$ (tarkistus: $4^2 = 16$)

Ajattelutapaa voi havainnollistaa vaikka seuraavilla esimerkeillä:
Taskussa oli aamulla 5 € ja kahvilassa käynnin jälkeen 1,70 €. Paljonko kahvittelu maksoi?
Kahdeksan hengen tiimi ostaa pomolle 100 euron arvoisen lahjan. Paljonko kukin joutuu maksamaan?
Neliön pinta-alaksi halutaan saada 16 m^2. Kuinka pitkä on sivun pituus?

Lasku-järjestys

Laskutoimitukset tehdään vasemmalta oikealle seuraavassa järjestyksessä:
1. Potenssit ja juuret.
2. Kertolaskut ja jakolaskut.
3. Yhteen- ja vähennyslaskut.

Jos tästä järjestyksestä halutaan poiketa, käytetään sulkuja ilmaisemaan, mitkä laskutoimitukset tehdään ensin. Laskutoimituksista yhteen- ja kertolaskut ovat vaihdannaisia eli niissä lukujen järjestyksellä ei ole väliä. Siten esimerkiksi $2 + 3 = 3 + 2$ ja $4 \cdot 5 = 5 \cdot 4$.

Merkintätapa: Kertomerkki on pakollinen yleensä vain kahden luvun välissä. Jos toinen kerrottavista (tai molemmat) on symboli tai sulkulauseke, kertomerkkiä ei kirjoiteta näkyviin. Tavallisesti lukukertoimet kirjoitetaan ennen symboleja, esim. $2\pi = 2\cdot\pi$, $4x = 4\cdot x$, $ab = a\cdot b$, $7(x+5) = 7\cdot(x+5)$. Huomaa, että merkintä ab voi tarkoittaa myös kaksimerkkistä muuttujaa. Epäselvissä tapauksissa kertolasku pitää kirjoittaa pisteellisenä $a\cdot b$.

Ykkönen

Jos luku 1 on kertojana, jakajana tai potenssina, sitä ei yleensä kirjoiteta näkyviin. On kuitenkin oikein kirjoittaa $a = 1\cdot a$ tai $a = a^1$ tai $a = \frac{a}{1}$.

Esim. 1.7

a) Lauseke $4 + \frac{2\cdot 6}{5}$ voidaan syöttää laskimeen suoraan $4 + 2\cdot 6/5$.

b) Lausekkeen $\frac{4+7}{2+5}$ arvon laskeminen vaatii sulut $(4+7)/(2+5)$. Jos syötetään laskimeen ilman sulkuja $4+7/2+5$, tulee laskettua lauseke $4 + \frac{7}{2} + 5$.

Merkkisäännöt

Yhteen-, vähennys- ja kertolaskuissa tarvitaan alla olevia merkkisääntöjä.

Sääntö	*Esimerkki*
$a + (+b) = a + b$	$2 + (+3) = 2 + 3 = 5$
$a + (-b) = a - b$	$2 + (-3) = 2 - 3 = -1$
$a - (+b) = a - b$	$2 - (+3) = 2 - 3 = -1$
$a - (-b) = a + b$	$2 - (-3) = 2 + 3 = 5$
$a\cdot(-b) = -a\cdot b$	$2\cdot(-3) = -6$
$-a\cdot(-b) = a\cdot b$	$-2\cdot(-3) = 6$
$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$
$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	
$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$	$\frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

Murtoluvut

Murtoluvun osat ovat $\frac{a}{b}$ *osoittaja* (a), *nimittäjä* (b)

Usein murtolukulaskuissa joudutaan laventamaan tai supistamaan.

– *laventaminen* = murtoluvun osoittaja ja nimittäjä kerrotaan samalla luvulla

$$^{7)}\frac{2}{3} = \frac{7\cdot 2}{7\cdot 3} = \frac{14}{21}$$

– *supistaminen* = murtoluvun osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla

$$\frac{16^{(4}}{20} = \frac{4}{5}$$

Yhteen- ja vähennyslasku

Jos kahdella murtoluvulla on sama nimittäjä (eli ne ovat samannimiset), niin niiden summa tai erotus saadaan laskemalla osoittajat yhteen tai vähentämällä osoittajat. Tarvittaessa luvut on ensin lavennettava samannimisiksi.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Esim. 1.8 a) $${}^{5)}\frac{1}{2}+{}^{2)}\frac{1}{5}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{5+2}{10}=\frac{7}{10}$$

b) $${}^{4)}\frac{1}{3}-{}^{3)}\frac{1}{4}=\frac{4}{12}-\frac{3}{12}=\frac{4-3}{12}=\frac{1}{12}$$

Kertolasku

Murtoluvut kerrotaan siten, että osoittajat ja nimittäjät kerrotaan keskenään. Huomaa, että lukujen ei tarvitse olla samannimisiä.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Esim. 1.9 $$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}$$

Jakolasku

Murtoluvut jaetaan siten, että jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc} \quad \text{tai} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Esim. 1.10 a) $$\frac{4}{5}:\frac{3}{10}=\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{3}=\frac{4\cdot 10}{5\cdot 3}=\frac{40^{(5}}{15}=\frac{8}{5}$$

b) $$\frac{1}{2}:\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{1}=\frac{5}{2}$$

Jos laskutoimituksissa on kokonaislukuja, ne ajatellaan murtolukuina, joissa nimittäjä on 1.

Esim. 1.11. a) $2+\frac{6}{7} \overset{7)}{=} \frac{2}{1}+\frac{6}{7}=\frac{14}{7}+\frac{6}{7}=\frac{20}{7}$

(tai muunto sekaluvusta murtoluvuksi $2+\frac{6}{7}=2\frac{6}{7}=\frac{2\cdot 7+6}{7}=\frac{20}{7}$)

b) $3\cdot\frac{5}{8}=\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3\cdot 5}{1\cdot 8}=\frac{15}{8}$

c) $1:\frac{1}{2}=\frac{1}{1}:\frac{1}{2}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}=\frac{2}{1}=2$

d) $\frac{1}{2}:3=\frac{1}{2}:\frac{3}{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Harjoitustehtäviä

1.7 Laske ilman laskinta

a) $1+2\cdot\frac{3}{4}$ b) $1\cdot 2+\frac{3}{4}$ c) $\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot 4$ d) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)$ e) $\frac{3}{5}\cdot\left(2+\frac{2}{3}\right)$ f) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{9}}$

1.8 Laske ilman laskinta

a) $1+(-3)+\frac{6}{2}:3$ b) $2^3+3^2\cdot(-1)$ c) $\dfrac{2\cdot(3+1)^2}{5-(-3)}$

d) $\sqrt{4+5}-\dfrac{1}{5-2}$ e) $\sqrt{2^4}+\dfrac{-2}{4\cdot 3}\cdot\dfrac{2+4}{-8}:\dfrac{1}{2}$

1.9 Laske laskimella. Kirjoita laskutoimitukset laskimeen kerralla, käytä tarvittaessa sulkuja.

a) $\dfrac{689\cdot 43{,}2\cdot 2846}{3893\cdot 75{,}4}$ b) $\dfrac{0{,}0854+0{,}00638}{0{,}2678-0{,}2817}$ c) $\dfrac{539}{4275}-\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{2{,}36+3{,}28}$

1.10 Laske laskimella. Kirjoita laskutoimitukset laskimeen kerralla, käytä tarvittaessa sulkuja.

a) $\dfrac{\pi\cdot 3{,}85}{3{,}00}(6{,}75^2+6{,}75\cdot 2{,}42+2{,}42^2)$ b) $\sqrt{32{,}4^2+41{,}8^2}$ c) $\sqrt{\dfrac{3{,}00\cdot 68{,}7}{4{,}00\pi}}$

1.4 SUUREET JA SYMBOLIT

Matematiikassa ja sen sovelluksissa lasketaan lukujen sijasta yleensä erilaisia symboleja. Usein symbolit ovat kirjaimia tai lyhyitä sanoja. Jos tietyllä symbolilla tarkoitetaan aina samaa lukua, niin symbolia sanotaan *vakioksi*.

Esim. 1.12 $\pi = 3{,}14159\ldots$, $\mathrm{e} = 2{,}71828\ldots$, $\% = 1/100$ tai $\mathrm{g} = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$

Sen sijaan symboli $\sqrt{\ }$ ei ole luku vaan erään matemaattisen toimenpiteen merkki. Muita tällaisia ovat esimerkiksi ln, exp, sin ja cos. Jos symbolilla kuvattu lukuarvo voi muuttua, puhutaan *muuttujasta* tai *suureesta* (suure = jonkin asian tai esineen mitattava ominaisuus). Matematiikassa muuttuja voi olla esimerkiksi janan pituus x tai fysiikan suure massa m.

Sekä vakioihin että muuttujan arvoihin voi liittyä yksiköitä. Koska yksiköissä voi esiintyä samoja kirjaimia kuin muuttujilla tai suureilla (esimerkiksi m = metri tai m = massa), erotetaan yksiköt ja muuttujat painetussa tekstissä erilaisella fontilla. Muuttujat ja suureet, kuten x, y, F, t ja s, merkitään kursiivilla. Yksiköt merkitään antiikvalla eli perusfontilla ilman kursivointia.

Esim. 1.13 Yhtälössä $v = 1{,}6\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 2{,}3\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot t$ suureita ovat v ja t; $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ja $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ovat yksiköitä.

Joskus samaa suuretta tarvitaan kuvaamaan eri tilanteita. Tällöin eri tapaukset erotetaan toisistaan alaindeksillä. Esimerkiksi kaksi eri virtaa voidaan merkitä I_1 ja I_2 tai alkunopeus v_0 . Huomaa, että eri alaindeksi tarkoittaa eri muuttujaa.

1.5 KYMMENPOTENSSIMUOTO, ETULIITTEET JA YKSIKÖNMUUNNOKSET

Potenssit käsitellään tarkemmin luvussa 2.2, mutta koska kymmenpotensseja tarvitaan laskuissa usein jo alkuvaiheessa, ne otetaan jo nyt esiin.

Kymmenpotenssit voidaan kirjoittaa kokonais- tai desimaalilukuina näin:
$10^3 = 10\cdot 10\cdot 10 = 1000$ (eksponentti 3 ilmoittaa nollien määrän luvun lopussa)
$10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$ (eksponentin itseisarvo ilmoittaa nollien määrän luvun alussa).
Muista myös, että luku potenssiin 0 on aina 1 eli $10^0 = 1$.

Koska käyttämämme kymmenlukujärjestelmä on paikkajärjestelmä, voidaan suuruusluokka ilmoittaa kymmenen potenssina. Esimerkiksi luku 3519204,86 voidaan ilmoittaa kymmenpotenssimuodossa 3,51920486·10^6.

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0		10^{-1}	10^{-2}
3	5	1	9	2	0	4	,	8	6
miljoonat	sadat tuhannet	kymmenet tuhannet	tuhannet	sadat	kymmenet	ykköset		kymmenes-osat	sadas-osat

Kymmen-potenssi Yleisesti luvun x kymmenpotenssimuodolla tarkoitetaan muotoa $x = a \cdot 10^n$, $n \in \mathbf{Z}$ ja $1 \leq a < 10$.

Kymmenen eksponentti ilmoittaa, paljonko pilkkua on siirretty oikealle (negatiivinen eksponentti) tai vasemmalle (positiivinen eksponentti), jotta lukuarvo tulisi välille 1..10.

Esim. 1.14 a) $0{,}00251 = 2{,}51 \cdot 10^{-3}$ (pilkku siirretty 3 yksikköä oikealle)

b) $12\,000\,000\,000 = 1{,}2 \cdot 10^{10}$ (pilkku siirretty 10 yksikköä vasemmalle)

Helpoin tapa syöttää kymmenpotenssimuoto laskimeen on käyttää EE- tai EXP -näppäintä. Tällöin kertomerkkiä ei tarvitse kirjoittaa, vaan syötetään vain kerroin, painetaan EE/EXP-näppäin ja kirjoitetaan pelkkä eksponentti.

Esim. 1.15 a) $5{,}1 \cdot 10^7$ syötetään 5,1E7

b) $3{,}8 \cdot 10^{-4}$ syötetään 3,8E-4

Etuliitteet Tietyt kymmenen potenssit voidaan korvata vastaavalla etuliitteellä. Tällöin etuliite liittyy yksikköön. Etuliitteitä on seuraaville kymmenen potensseille:

10:n potenssi	**etuliite**	**lyhenne**
10^1	deka	da
10^2	hehto	h
10^3	kilo	k
10^6	mega	M
10^9	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	eksa	E
10^{21}	tsetta	Z
10^{24}	jotta	Y

10:n potenssi	**etuliite**	**lyhenne**
10^{-1}	desi	d
10^{-2}	sentti	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	mikro	µ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	piko	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	tsepto	z
10^{-24}	jokto	y

Esim. 1.16 a) $1000 \text{ m} = 1\cdot10^3 \text{ m} = 1 \text{ km}$

b) $0{,}0001 \text{ g} = 0{,}1 \text{ mg} = 100\ \mu\text{g}$

c) $0{,}0000025 \text{ Mm} = 2{,}5 \text{ m}$

d) Suomen sähköntuotanto vuonna 2008 oli 77436 GWh eli kymmenpotenssimuodossa $77436\cdot10^9 \text{ Wh} = 7{,}7439\cdot10^{13} \text{ Wh}$.

Esim. 1.17 Linnunradan läpimitta on noin 100 000 valovuotta. Valovuosi on pituusyksikkö, jonka suuruus on valon vuoden aikana kulkema matka. Laske Linnunradan läpimitta metreinä, kun valon nopeus on noin 300 000 km/s ja vuodessa on 365 vuorokautta.

Ratkaisu. Yksi vuosi on

$365 \text{ d} = 365 \cdot 24 \text{ h} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} = 365 \cdot 24 \cdot 60\cdot 60 \text{ s} = 3{,}1541\cdot 10^7 \text{ s}$,

joten 1 valovuosi = valon nopeus · vuosi = $3{,}0\cdot10^5 \text{ km/s} \cdot 1 \text{ a}$

$= 3{,}0\cdot10^8 \text{ m/s} \cdot 3{,}1541\cdot 10^7 \text{ s} = 9{,}4608 \cdot10^{15} \text{ m}$

ja 100 000 valovuotta = $100\,000\cdot9{,}4608 \cdot10^{15} \text{ m} = 9{,}4608 \cdot10^{20} \text{ m}$

$\approx 9{,}5 \cdot10^{20} \text{ m} = 0{,}95 \cdot10^{21} \text{ m} = 0{,}95 \text{ Zm}$.

Harjoitustehtäviä

1.11 Kirjoita kymmenpotenssimuodossa

a) 22 500 b) 0,041 c) 19 330 000 000 d) 0,0000001

1.12 Kirjoita metreinä käyttäen kymmenpotenssimuotoa

a) 0,15 Gm b) 20 m c) 0,34 μm d) 450 nm

1.13 Kirjoita käyttämällä sopivaa etuliitettä

a) 1000 m b) 0,0001 m c) 30 000 V d) 0,150 g

e) 1 775 000 000 mm f) 6 250 000 nm g) 0,0000025 km h) 0,000268 ms

1.14 Kirjoita käyttämällä sopivaa etuliitettä

a) $0{,}012 \cdot10^4$ g b) $1{,}34 \cdot10^{-2}$ g c) $5{,}5 \cdot10^{11}$ Hz d) $3{,}3 \cdot10^{-3}$ μs

e) $1{,}23 \cdot10^{-3}$ mV f) $4{,}6 \cdot10^5$ pF

1.15 Tietokoneen kiintolevyllä on 350 Gt vapaata tilaa. Yhden kuvatiedoston koko on keskimäärin 2,1 Mt. Kuinka monta kuvaa kiintolevylle mahtuu?

1.16 Kuinka pitkä matka on yksi valonanosekunti?

1.6 TARKKUUS JA PYÖRISTÄMINEN

Esim. 1.18 Mittaat askelilla narun pituudeksi 6 metriä. Käytät narua harppina ja piirrät sen avulla ympyrän, jonka säde on siis noin 6 m. Lasket ympyrän pinta-alan kaavalla $A = \pi \cdot r^2$ ja saat tuloksen $A = \pi \cdot (6\text{ m})^2 = \pi \cdot 36\text{ m}^2 = 113{,}0973355...\text{m}^2$

Millä tarkkuudella annat vastauksen? Onko oikea pyöristys $113{,}1\text{ m}^2$, 113 m^2, 110 m^2 vai 100 m^2 ?

Luvuilla laskettaessa täytyy tietää, ovatko luvut tarkkoja vai sisältävätkö ne virhettä eli ovat likiarvoja. Seuraavassa taulukossa on pääpiirteissään jako tarkkojen arvojen ja likiarvojen välillä.

Tarkka arvo, ei virhettä	Likiarvo
Kokonaisluvut	Mittaustulos, esim. pituus $s = 1{,}4$ m
Lukumäärä	Pyöristystulos, esim. $\pi \approx 3{,}14$
Murtoluvut	Likiarvoilla suoritettujen laskutoimitusten tulos
Kaavoissa olevat kokonaislukukertoimet	

Tarkan arvon ja likiarvon etäisyyttä toisistaan sanotaan (absoluuttiseksi) virheeksi.

Virhe Virhe = | tarkka arvo – likiarvo |

$$\text{Suhteellinen virhe} = \frac{\text{virhe}}{\text{tarkka arvo}} \approx \frac{\text{virhe}}{\text{likiarvo}}$$

Suhteellinen virhe ilmoitetaan yleensä prosenttilukuna.

Esim. 1.19 a) Jos tarkka arvo on $\frac{2}{3}$ ja sen likiarvona käytetään lukua $0{,}7$ niin

$$\text{virhe} = \left|\frac{2}{3} - 0{,}7\right| = 0{,}0333... \text{ ja}$$

$$\text{suhteellinen virhe} = \frac{0{,}0333...}{\frac{2}{3}} = 0{,}05 = 5\ \%$$

b) Jos mittaustulos esitetään muodossa $t = (18{,}3 \pm 0{,}2)$ s, se merkitsee, että t on välillä $18{,}1\text{ s} \le t \le 18{,}5\text{ s}$. Tällöin virhe Δt on välillä $-0{,}2\text{ s} \le \Delta t \le 0{,}2\text{ s}$.

Virheen enimmäisarvo eli yläraja on $|\Delta t| \leq 0{,}2\ \mathrm{s}$ ja suhteellisen virheen ylä-

raja on $\left|\dfrac{\Delta t}{t}\right| \leq \dfrac{0{,}2\ \mathrm{s}}{18{,}3\ \mathrm{s}} = 0{,}0109... \approx 2\ \%$

Virhettä ei koskaan saa pyöristää alaspäin, koska haetaan pahinta mahdollista tilannetta.

Pyöristys-ohje Desimaaliluku pyöristetään katkaisemalla luku. Kokonaisluku pyöristetään muuttamalla luvun lopussa olevia numeroita nolliksi. Mikäli vasemmalta lukien ensimmäinen pois jätetty desimaali tai nollaksi muutettu numero on ≥ 5, korotetaan edellistä numeroa yhdellä yksiköllä.

Esim. 1.20 a) 51 051 on satojen tarkkuudella 51 100,
b) 1 234 567 on kymmenen tuhannen tarkkuudella 1 230 000,
c) 14,52035 on kolmen desimaalin tarkkuudella 14,520,
d) 99,9999 on ykkösten tarkkuudella $1{,}00 \cdot 10^2$.
(Kymmenpotenssimuodossa tarkkuus näkyy kertoimesta, pyöritys lukuun 100 ilmaisee vain satojen tarkkuuden.)

Merkitsevät numerot Likiarvon tarkkuutta ilmaisevien *merkitsevien numeroiden* lukumäärään lasketaan yleensä kaikki luvun numerot, PAITSI

- kokonaisluvun lopussa olevat nollat
- desimaaliluvun alussa olevat nollat.

Esim. 1.21 Seuraavien likiarvojen tarkkuus on:

12 700	, 3 numeroa
1027	, 4 numeroa
1,270	, 4 numeroa
0,012	, 2 numeroa
0,020	, 2 numeroa
$1{,}2700 \cdot 10^4$	, 5 numeroa

Huomaa: tarkkuus ei muutu, vaikka yksikön etuliitettä vaihdetaan
0,037 kg = 37 g = 37 000 mg tarkkuus 2 numeroa

Likiarvon tarkkuus voidaan ilmoittaa

- arvioidulla virheen ylärajalla
- numeroiden määrällä
- desimaalien määrän ja yksikön avulla
- viimeisen mukaan otetun numeron yksikön avulla.

Esim. 1.22 a) Matkan pituus on $s = (234{,}56\ \mathrm{m} \pm 0{,}02\ \mathrm{m})$

b) Likiarvon 295,6 m tarkkuus on
- 4 numeroa
- 1 desimaali yksikkönä metri
- 0,1 metriä eli desimetri
- Likiarvon virhe on enintään 0,05 m.

Esim. 1.23 a) 2534 on 2 numeron tarkkuudella 2500
b) 14,992 m on desimetrin tarkkuudella 15,0 m
c) 0,0078139 on 3 numeron tarkkuudella 0,00781
d) 0,0078139 on 3 desimaalin tarkkuudella 0,008
e) 51777 g on kilogramman tarkkuudella 52 kg
f) 13999 on 3 numeron tarkkuudella $1{,}40 \cdot 10^4$
g) 0,00227 on 2 desimaalin tarkkuudella 0,00

Likiarvolaskujen tuloksen tarkkuus
Huomaa:
1. Älä pyöristä välivaiheissa. Vasta lopullinen tulos pyöristetään.
2. Jos luvut ovat tarkkoja, pyöristystä ei tarvita.
3. Laskutoimitukset eivät milloinkaan lisää tarkkuutta. Liian tarkasti annettu vastaus on virhe. Muista miettiä, mikä on lopputulokselle järkevä tarkkuus.

Sääntö Lopputulokseen saa laittaa yhtä monta **merkitsevää numeroa** kuin niitä on **epätarkimmassa** lähtöarvossa.

Esim.1.24 a) $\pi \cdot (2{,}6\ \text{cm})^2 = 21{,}23716\ldots\ \text{cm}^2 \approx 21\ \text{cm}^2$

b) $\dfrac{3{,}2 \cdot 0{,}168}{14{,}6} = 0{,}036821\ldots \approx 0{,}037$

Harjoitustehtäviä

1.17 Esitä luvut 15,38420 ja 0,050927
a) 3 merkitsevän numeron tarkkuudella,
b) 2 merkitsevän numeron tarkkuudella,
c) 2 desimaalin tarkkuudella.

1.18 Pyöristä luku 1 329 085
a) satojen tarkkuuteen,
b) kymmenien tuhansien tarkkuuteen,
c) 2 numeron tarkkuuteen.

1.19 Kuinka monen merkitsevän numeron tarkkuudella on annettu seuraavat likiarvot
a) 2010 b) 0,002010 c) 2,010 d) $2{,}010 \cdot 10^4$?

1.20 π korvataan luvulla $3\frac{1}{7}$. (Tätä käytettiin π:n arvona käsin laskettaessa.)

Kuinka suuri on tämän likiarvon
a) absoluuttinen virhe 4 numeron tarkkuudella,
b) absoluuttinen virhe 4 desimaalin tarkkuudella,
c) suhteellinen virhe 2 numeron tarkkuudella,
d) prosentuaalinen virhe 2 numeron tarkkuudella?

1.21 Auton matkamittari näyttää oikein, kun autossa on kesärenkaat, joiden halkaisija on 54,0 cm. Autoon vaihdetaan talvirenkaat, joiden halkaisija on 54,5 cm.
a) Mihin suuntaan mittarin näyttö muuttuu?
b) Kuinka suuri on prosentuaalinen virhe?
c) Kuinka pitkälti on ajettu talvirenkailla, kun matkamittari näyttää 655 km?

1.22 Laske lausekkeiden arvot ja pyöristä vastaus lähtöarvojen perusteella oikeaan tarkkuuteen.

a) $2{,}341 + 0{,}32 - 0{,}0471$ b) $4\pi\left(\frac{2{,}55\,\text{mm}}{2}\right)^2$ c) $\frac{12{,}7\,\text{m} + 3{,}25\,\text{m}}{2} \cdot 0{,}750\,\text{m}$

d) $2\pi \cdot 7{,}76 \cdot 10^{-6} - \frac{1{,}22 \cdot 10^4 - 3{,}44 \cdot 10^3}{0{,}95 \cdot 4{,}66 \cdot 10^9}$

Muistilappu lukuun 1

"Math is like love – a simple idea but it can get complicated"
- R. Drabek

Tavallisimmat lukujoukot:
Z = kokonaisluvut = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...}

R = reaaliluvut = kokonaisluvut ja kaikki desimaaliluvut

Ääretön ∞ ei kuulu reaalilukuihin.

a ja $-a$ ovat toistensa vastalukuja,

a ja $\frac{1}{a}$ ovat toistensa käänteislukuja,

itseisarvo $|a|$ ilmoittaa luvun a etäisyyden nollasta,

Numero 1 kirjoitetaan kertojana, jakajana ja eksponenttina näkyviin vain tarvittaessa: $a = 1 \cdot a$, $a = \frac{a}{1}$, $a = a^1$

Murtoluku:

Viidellä ihmisellä neljästä on vaikeuksia murtolukujen kanssa

$$\frac{\text{osoittaja}}{\text{nimittäjä}}$$

Supistaminen: jaa osoittaja ja nimittäjä samalla luvulla

$$\frac{16^{(4}}{20} = \frac{4}{5}$$

Laventaminen: kerro osoittaja ja nimittäjä samalla luvulla

$$^{7)}\frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{14}{21}$$

Murtolukujen laskusäännöt:

Yhteen –ja vähennyslasku (sama alakerta!)

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

Kerto –ja jakolasku (ei tarvitse olla samannimiset!)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Kymmenpotenssimuoto:
luku kirjoitetaan muotoon $a \cdot 10^n$, missä $1 \leq a < 10$ ja $n \in$ **Z**

Likiarvoilla laskettaessa tulos ei voi olla tarkempi kuin lähtöarvot: pyöristys aina heikoimman lenkin eli epätarkimman mukaan.

1. LUVUT

1.1. -2π, 0, $\frac{1}{\pi}$, $\frac{\pi}{2}$, π-1, π

1.2. a) 100 b) -5 c) 100, 1,5, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{5}$ d) -5 e) 100, -5 f) $\frac{1}{5}$ g) kaikki

1.3. a) $k \in Z_+$ b) R > 0 c) $-0{,}5\,\mathrm{m} \le d \le 0{,}5\,\mathrm{m}$ tai $d \in [-0{,}5\,\mathrm{m}, 0{,}5\,\mathrm{m}]$

1.4. Vastaluvut: -6, $\frac{1}{2}$, $-\frac{4}{11}$, -2,25 ja $-\frac{a}{b}$.

Käänteisluvut: $\frac{1}{6}$, -2, $\frac{11}{4}=2{,}75$, $\frac{4}{9}=0{,}444$, $\frac{b}{a}$

1.5. 14

1.6. a) $0 \le x < 6$ b) $x < 1$ c) $x \le -10$ tai $-7 \le x \le 1$ tai $x \ge 5$

1.7. a) 2,5 b) 2,75 c) 6,667 d) 0,75 e) 1,6 f) 3

1.8. a) -1 b) -1 c) 4 d) 2,667 e) 4,25

1.9. a) 288,591 ≈ 289 b) -6,603 ≈ -6,60 c) 0,0696439 ≈ 0,0696

1.10. a) 273,164 ≈ 273 b) 52,887 ≈ 52,9 c) 4,0498 ≈ 4,05

1.11. a) $2{,}25 \cdot 10^4$ b) $4{,}1 \cdot 10^{-2}$ c) $1{,}933 \cdot 10^{10}$ d) $1 \cdot 10^{-7}$

1.12. a) $1{,}5 \cdot 10^8$ m b) $2 \cdot 10^1$ m c) $3{,}4 \cdot 10^{-7}$ m d) $4{,}5 \cdot 10^{-7}$ m

1.13. a) 1 km b) 0,1 mm c) 30 kV d) 150 mg e) 1775 km
f) 6,25 mm g) 2,5 mm h) 268 ns

1.14. a) 120 g b) 13,4 mg c) 550 GHz d) 3,3 ns e) 1,23 µV
f) 0,46 µF

1.15. Yli 160 000

1.16. 30 cm

1.17. a) 15,4 ja 0,0509

1.18. a) 1329100

1.19. a) 3

1.20. a) 0,001264 c) $4{,}0 \cdot 10^{-4}$

1.21. b) 0,9 % c) 661,065 km

1.22. a) 2,61 b) 20,4 mm^2 c) 5,98 m^2 d) $4{,}7 \cdot 10^{-5}$

2. LAUSEKKEET

2.1. -1,47541 ≈ -1

2.2. $2{,}8 \cdot 10^{-4}$

2.3. 1

2.5. a) 1 b) -1 c) $-b^3$ d) -1/8 e) -8 f) 1 g) -1 h) 1 i) 4

2.6. a) $a^{10}b^{15}$ b) 3,807 V · A · s c) 0 d) $\frac{7u^2v^2}{w^2}$ e) $\frac{2}{5y}$

f) $-\frac{125}{8z^3}$ g) $\frac{16n^2}{l^2}$

2.7. a) 0,0036 mm b) 3,2 W

2.8. $5{,}0 \cdot 10^{12} \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{km}^3}$

2.9. a) -1 b) 1 c) $\frac{1}{c^n}$ d) $8{,}2 \cdot 10^{-14}$ J e) a^2b

2.10. 130

2.11. 1

2.12. 4,773 m^2

2.13. 25,2 m, 13,8 m

2.14. a) $6|a|b^4|b|c^2$ b) $\frac{xy|y|}{3}$ c) a^2+1 d) $\sqrt{a}|b||c|$

2.15. a) 7 m^2 b) 1,5 m/s c) 0,08 m^3/s

2.16. a) 2 b) 2 c) 9 d) 4 e) 0,5 f) 216/125

2.17. a) $a^{\frac{7}{6}}$ b) $x^{\frac{1}{6}}$ c) $|a|b||$ d) $a^{\frac{-4}{9}}$

2.18. a) $4ax^2+3x-2$; $8ax^2-3x+4$ b) $5x^m-5y^n$; $-x^m-y^n$ c) $3s-2t$; $2r-s$

2.19. b^2-a^2

2.20. a) $4s^9$ b) $a^{12}b^{13}$ c) $2\pi rh+2\pi r^2$ d) $\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$ e) s^3+s^2-2s f) 0

Tekninen matematiikka 1

Itsenäisen työskentelyn osuus on jatkuvasti lisääntynyt koulutuksen eri tasoilla myös matematiikassa.

Tässä oppikirjassa on teorian tueksi esitetty runsaasti käytännön sovellutuksia, jotka motivoivat ja helpottavat omatoimista opiskelua.

Tekninen matematiikka 1 on laadittu siten, että kirja sisältää riittävästi teoriaa ja perustehtäviä ammatillisen pohjakoulutuksen saaneille ja toisaalta kyllin haastavia tehtäviä lukiopohjaisille opiskelijoille.

Koulutuksen rakenteen muuttumisesta huolimatta matemaattis-luonnontieteelliset aineet tulevat aina säilymään tekniikan tärkeänä perustana.

Hyvä matematiikan osaaminen auttaa myöhemmin työelämässä uusien teknisten asioiden ja sovellusten ymmärtämisessä ja omaksumisessa.

Uusittu painos, 2011

ISBN 978-952-5491-70-8

9 789525 491708

K 51

www.tammerteknijkka.fi