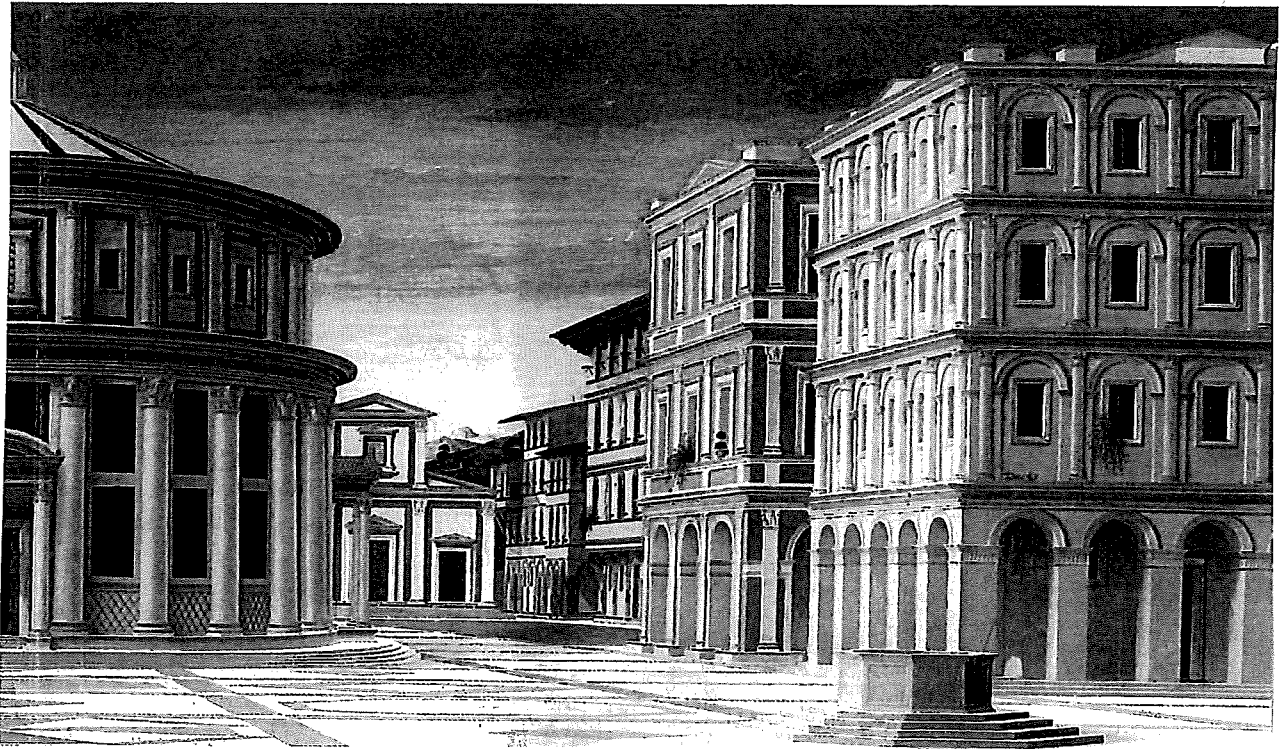


SIMO KIVELÄ

Perspektiivikuvan geometriset perusteet



 **Tammertekniikka**

Simo K. Kivelä

Perspektiivikuvan geometriset perusteet

1. painos

 **Tammertekniikka**

Teos on saanut tukea Suomen tietokirjailijat ry:ltä.

YHTEYSTIEDOT

Tilaukset ja tiedustelut

Tammertekniikka

Puh. (03) 2611 612

Fax (03) 2530 306

Email tilaukset@tammertekniikka.fi

www.tammertekniikka.fi

Tilaukset myös Kirjavälitys Oy:n kautta

Kustantaja: Tammertekniikka / Amk-Kustannus Oy
1. painos, 2008

ISBN 978-952-5491-49-4

Gummerus Kirjapaino Oy, Jyväskylä

Kirjoittaja: Simo K. Kivelä

Kansikuva: Piero della Francesca, Ihanteellinen kaupunki (Citta Ideale), n. 1740

© 1990 Photo SCALA, Florence, courtesy of the Ministero Beni e Att. Culturali

© Simo K. Kivelä ja Amk-Kustannus Oy 2008

Kopiointiehdot

Tämä teos on oppikirja. Teos on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61). Teoksen valokopioiminen on kielletty ellei valokopiointiin ole hankittu lupaa. Tarkista onko oppilaitoksellanne voimassaoleva valokopiointilupa. Lisätietoja luvista ja niiden sisällöstä antaa Kopiosto ry. <http://www.kopiosto.fi/>

Teoksen tai sen osan digitaalinen kopioiminen tai muuntelu on ehdottomasti kielletty.

Lukijalle

Kolmiulotteisia kohteita esittävien kuvien muodostamiseen on monta näkökulmaa. Taiteilija pyrkii tuomaan esiin oman sisäisen näkemyksensä, insinööri haluaa mittatarkkoja piirustuksia, valokuvaaja on ehkä uskollinen todellisuu-delle, mutta nostaa esiin merkityksellisinä pitämiään asioita. Matemaatikko katsoo, että kyseessä on sopivan projektiokuvauksen valinta.

Näkökulmat eivät kuitenkaan ole erillisiä. Monet renessanssiajan taiteilijat oli-vat samalla geometrikkoja, joita kiinnostivat totuudenmukaisten kuvien sään-nönmukaisuudet. Kameran periaatteena on eräs projektiokuvaus, keskuspro-jektio. Insinööri tarvitsee projektiokuvausten säännöllisyysominaisuuksia mit-tatarkkuutta varten, mutta laatii myös mahdollisimman havainnollisia kuvia konstruktiopiirustusten ohella.

Erilaiset mahdollisuudet projektiokuvausten määrittelyyn ja valitun kuvauk-sen säännöllisyysominaisuudet muodostavat pohjan kuvien piirtämiselle. Jos kyseessä on keskusprojektio, tuloksena saadaan perspektiivisäännöt. Yhden-suuntaisprojektio tuottaa vastaavasti ohjeet aksonometrinen kuvien piirtämi-seen. Muitakin projektioita on, joskin niiden käyttö on vähäisempää.

Tämän kirjan tavoitteena on johtaa projektiokuvausten geometrisista ominai-suuksista lähtien säännöt sekä perspektiivikuvien että aksonometrinen kuvien piirtämiseen. Sääntöjä voidaan käyttää myös käänteiseen suuntaan ns. rekon-struktioprobleemassa: mitä kuvan perusteella voidaan päätellä kohteesta ja mi-ten päättely on tehtävä. Tarkastelun kohteena on myös tietotekniikan tuoma mahdollisuus muodostaa kuvia laskemalla.

Näkökulma on matemaattinen. Esitietoina ei tarvita juurikaan lukion pitkää matematiikkaa enempää, mutta kyky kuvitella asioita kolmiulotteisessa ava-ruudessa on suureksi avuksi. Tämän sanotaan usein olevan ihmisen synnynnäinen ominaisuus, jota ei voi kehittää. Näin ei kuitenkaan liene: harjoitus auttaa tässäkin.

Kuvien laskemista käsiteltäessä tarvitaan vektorialgebraa ehkä hieman lukio-oppimäärää laajemmin. Kohdat voi ohittaa, ilman että muun ymmärtäminen vaikeutuu. Toisaalta lähdeoteeksi kelpaa melkein mikä tahansa lukiomate-matiikkaa hiukan laajempi oppikirja, esimerkiksi [4].

Kirjan taustana on se kokemus, jonka olen saanut opettaessani deskriptiivistä geometriaa ja perspektiivioppia Teknillisessä korkeakoulussa 1980-luvulle saakka. Korkeakoulun opetusohjelmasta nämä kurssit ovat jääneet pois jo useita vuosia sitten, eivätkä niihin aikoinaan sisältyneet yksityiskohtaiset piirustusmenetelmät enää olekaan merkityksellisiä. Niitä ei myöskään kirjassa ole. Geometristen perusteiden ymmärtäminen on kuitenkin edelleen hyödyksi luonnosteltaessa kolmiulotteisia tilanteita tai analysoitaessa kuvia, olivatpa ne sitten valokuvia, tietokoneella tehtyjä tai muutoin piirrettyjä.

Suomen tietokirjailijat ry on tukenut apurahalla teoksen kirjoittamista, mistä lämmin kiitokseni. Kiitän myös siitä kärsivällisyydestä, jota yhdistys on osoittanut kirjoitusprosessin venähdettyä paljon aiottua pidemmäksi.

Kollegani Juhani Virkkunen on lukenut tekstiäni ja esittänyt joukon kommentteja, mistä parhaat kiitokseni. Kiitollisuudenvelassa olen myös Teknillisen korkeakoulun edesmenneelle professorille E. J. Nyströmille, jonka laatiman perspektiiviopin monisteen [6] kuvia olen voinut kustantajan luvalla käyttää.

Espoon Olarissa elokuun 6. päivänä 2008

Simo K. Kivelä

Sisältö

Lukijalle	3
Sisältö	5
1 Luonnollinen kuva	7
1.1 Historiaa	7
1.2 Projektiokuvaukset	9
1.3 Kuvan katsominen	15
2 Projektiokuvausten peruseometriaa	21
2.1 Yhdensuuntaisprojektion säilymisominaisuudet	21
2.2 Keskusprojektion säilymisominaisuudet	24
2.3 Mongen projektio	27
2.4 Käännökset avaruusgeometrisina konstruktioina	29
2.5 Janan näkyminen annetussa kulmassa	31
3 Perspektiivikuvan piirtäminen	33
3.1 Peruskäsitteet	33
3.2 Normaalin perspektiivikuvan piirtäminen	37
3.3 Vinon perspektiivikuvan piirtäminen	40
3.4 Distanssipisteet	46
3.5 Mittapistteet	48
3.6 Perspektiiviruudukot	50

4	Rekonstruktio perspektiivikuvasta	57
4.1	Janojen ja kulmien mittaaminen	57
4.2	Rekonstruktio normaalista perspektiivikuvasta	58
4.3	Rekonstruktio vinosta perspektiivikuvasta	63
5	Yhdensuuntaisprojektiio	67
5.1	Aksonometrisen kuvan piirtäminen	67
5.2	Yleisesti käytettyjä projektiioita	69
5.3	Pohlken lause ja projektioiden laskeminen	72
5.4	Schmidin-Eckhartin menetelmä	76
6	Kuvien piirtäminen laskemalla	83
6.1	Perspektiivikuva	83
6.2	Aksonometrinen kuva	87
6.3	Stereopari	89
7	Ympyrän ja pallon kuvautuminen	93
7.1	Kartioleikkaukset	93
7.2	Ympyrän aksonometrinen ja perspektiivikuva	95
7.3	Pallon kuvautumisesta	99
8	Projektiivista geometriaa	103
8.1	Äärettömän kaukaiset pisteet	103
8.2	Suora ja taso	105
8.3	Reliefigperspektiivi	106
	Kirjallisuutta	109
	Kuvat	111
	Hakemisto	115

Luku 1

Luonnollinen kuva

Muodostettaessa kaksiulotteisia *kuvia* kolmiulotteisista *kohteista* tavoitteena on usein saada mahdollisimman luonnollisia, 'oikeannäköisiä' kuvia. Tyypillisiä esimerkkejä ovat arkkitehtikuvat olemassa olevista tai suunnitelluista rakennuksista, maisemakuvat, sisätilakuvat, laitteiden rakenteen havainnekuvat, avaruusgeometriset havainnollistukset jne. Kuvat voidaan muodostaa joko piirtämällä tai kameralla kuvaamalla. Tietotekniikkaa käytettäessä piirtämisen pohjana voi olla kuvan muodostaminen laskemalla.

Taiteessa oikeannäköisyys ei useinkaan ole tärkein tavoite. Aikakauden, kulttuuripiirin tai taidesuunnan mukaan muut näkökohdat yleensä korostuvat enemmän. Silti perustana saattavat olla jotkin oikeannäköisyyteen liittyvät periaatteet esimerkiksi syvyysvaikutelman luomisessa tai huonetilan hahmottamisessa. Tällöin puhutaan *perspektiivin* käsitteestä laajassa mielessä.

Suppeammin perspektiivillä tarkoitetaan *geometrissa perspektiiviä* eli *viiva-perspektiiviä*, jolloin syvyysvaikutelma luodaan noudattamalla geometriaan pohjautuvia sääntöjä.

Syvyysvaikutelma voidaan synnyttää muillakin tavoilla, esimerkiksi valaistukseen tai ilman läpikuultavuuteen perustuen. Tällöin puhutaan *ilmaperspektiivistä*, eikä geometrialla ole roolia. Perustana voivat myös olla varjot, joiden konstruointi kuvaan voi ainakin osittain perustua geometriaan.

1.1 Historiaa

Syvyys-suhteiden kuvaamisesta perspektiivin avulla on merkkejä jo antiikin ajalta. EUKLEIDEEN (n. 300 eaa) teos *Optica* käsitteli ihmissilmän ominaisuuksia geometrian kannalta ja tunsi ainakin näkösäteen ja näkökartion käsitteet. Roomalaisen arkkitehdin VITRUVIUKSEN teoksessa *De architectura* (25 eaa)

on viitteitä perspektiivin käsitteisiin. Ainakin jossakin määrin perspektiivisiä kuvia on löydetty ruukkujen koristekuvioista.

Keskiajan Euroopasta ja arabikulttuurin piiristä tunnetaan joitakin tekstejä geometrisesta optiikasta ja ihmissilmän ominaisuuksista, perspektiiviin viittavia kuvia ei juurikaan. Syvyys-suhteiden kuvaamisesta alettiin uudelleen kiinnostua vasta renessanssin alkaessa 1300-luvun lopulla. Geometrisen perspektiivin ensimmäisistä kehittäjistä merkittävimpiä olivat FILIPPO BRUNELLESCHI (1377 – 1446) ja LEON BATTISTA ALBERTI (1404 – 1472), jotka loivat ensimmäiset perspektiivisäännöt vertaamalla ihmissilmän antamaa näkymää ja kohteesta tehtyä kuvaa. Tätä varten kuvaan tehtiin tirkistysreikä, jolloin kuvan kääntöpuolelta saatettiin katsoa kohdetta ja toisaalta peilin avulla sen kuvaa.

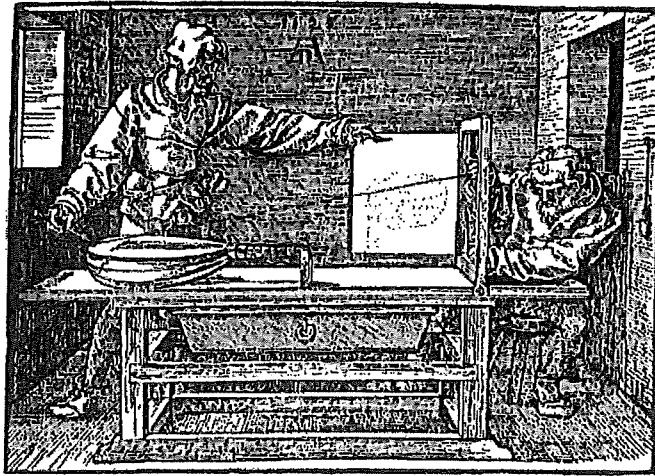
Brunelleschi ei liene kirjoittanut menetelmistään, mutta Alberti julkaisi nimellä *Costruzione legittima* tunnetun menettelyn teoksessaan *Della pittura* vuonna 1435. Kyseessä on ohje suora-asentoisen perspektiiviruudun piirtämiseen. Katsojan silmästä lähteviä näkösäteitä käytetään perusteluna, mutta laajemmin keskusprojektion käsitettä ei ilmeisesti hyödynnetä.

Monet renessanssiajan taiteilijat tutkivat perspektiiviä geometrisesti ja käyttivät sitä maalauksissaan hämmästyttävien syvyysvaikutelmien luomiseen. Huomattavimpia perspektiivin kehittäjiä olivat PIERO DELLA FRANCESCA (n. 1415 – 1492), LEONARDO DA VINCI (1452 – 1519) ja ALBRECHT DÜRER (1471 – 1528). Esimerkkejä teoksista on löydettävissä [www-sivustosta](#) [5].

Albrecht Dürer julkaisi vuonna 1525 perspektiivitutkimuksensa teoksessa *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und Richtscheydt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen*. Hän muodosti perspektiivikuvia laitteella, joka täysin vastaa keskusprojektiota: Katselupisteestä pingotetaan näkösadetta vastaava lanka vuorollaan jokaiseen (ainakin periaatteessa) kohteen pisteeseen ja katsotaan, missä tämä lävistää kuvaa varten asetetun kehyksen. Paikka merkitään kehykseen, mistä se siirretään kehykseen kiinnitettävälle kuvapohjalle. (Kuva 1.1.)

Keskusprojektion ja perspektiivikuvien välisen yhteyden ymmärtäminen johti *projektiiviseksi geometriaksi* kutsutun matematiikan osa-alueen syntymiseen. Tähän vaikutti erityisesti *Gérard Desargues* (n. 1591 – n. 1661), joka tosin omana aikanaan jäi varsin tuntemattomaksi.

Paitsi taiteissa havainnollisiin kuviin on pyritty myös teknisissä suunnittelutehtävissä. Tarvittavan piirtämisen geometristen perusteiden kehittäjistä on ennen muita mainittava Ranskan vallankumouksen ja Napoleonin sotien aikainen ranskalainen upseeri ja matemaatikko GASPARD MONGE (1746 – 1818), jota pidetään *deskriptiivisen geometrian* luoja. Tällöin kyseessä eivät ole perspektiivikuvat, vaan hieman erilaisiin periaatteisiin pohjautuva *aksonometria*.



Kuva 1.1: Dürerin perspektiivikone

Deskriptiivisen geometrian ja geometrisen perspektiiviopin myöhempi tutkimus on tapahtunut 1800-luvulla ja 1900-luvun alkupuolella suurelta osin Saksassa. Suomalaisista alan edustajista voidaan mainita Teknillisen korkeakoulun sovelletun matematiikan professori E. J. NYSTRÖM (1895 – 1960), deskriptiivisen geometrian opetuksen legendaarinen hahmo. Deskriptiivinen geometria ja perspektiivioppi olivatkin tärkeitä oppiaineita monissa teknillisissä yliopistoissa 1970-luvulle saakka.

Tietotekniikan kehitys 1900-luvun loppupuolelta alkaen on mullistanut perspektiivikuvien piirtämisen. Kohteesta luodaan kolmiulotteinen malli koneen muistiin, minkä jälkeen kuvan muodostaminen tapahtuu laskemalla. Perspektiivisääntöjä ei käyttäjän enää tarvitse osata, mutta kuvien ymmärtämistä helpottaa pääperiaatteiden tunteminen. Kuvilla huijaaminenkin on tällöin helpompaa paljastaa. Toisaalta aina ei käytetä konetta: taiteilijan on edelleen hyvä tuntea perspektiivin periaatteet, ehkä myös ymmärtää, mitä kuvan tekeminen laskemalla merkitsee.

1.2 Projektiokuvaukset

Kaksiulotteisen kuvan — ei välttämättä perspektiivikuvan — muodostaminen kolmiulotteisen avaruuden kohteesta tarkoittaa matemaattiselta kannalta jonkin *projektiokuvauksen* käyttöä. Tämä on funktio, jonka lähtöjoukkona on kolmiulotteinen avaruus tai sen sellainen osa, joka sisältää kuvattavan kohteen, ja maalijoukkona taso, johon kuva muodostetaan. Funktio liittyy jokai-

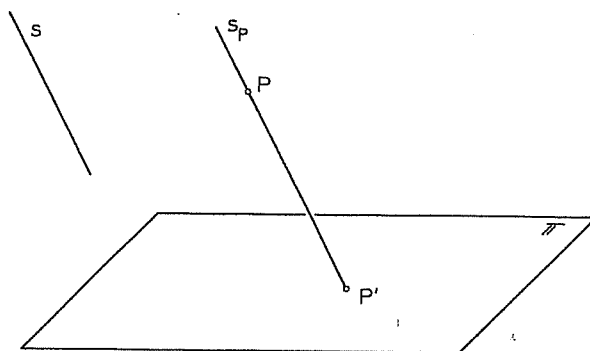
1.2 Projektiokuvaukset

seen kohteen pisteeseen vastaavan kuvapisteen. Projektiokuvaus voidaan määritellä usealla eri tavalla, jolloin samasta kohteesta saadaan erilaisilla periaatteilla muodostettuja kuvia.

Erityyppiset kuvat soveltuvat eri tarkoituksiin: Joskus voi olla tarpeen tehdä mahdollisimman luonnollisen näköinen kuva, vaikka kohteen mittasuhteiden selvittäminen sen perusteella olisikin vaikeaa. Toisaalta luonnollisuudesta voidaan tinkiä, jos on tärkeää voida helposti selvittää kohteen mitat.

Tavallisimmat projektiokuvaukset ovat *yhdensuuntaisprojektiio*, jolla muodostetaan *aksonometrisia kuvia*, ja *keskusprojektiio*, jolla muodostetaan *perspektiivikuvia*. Kumpikin on oikeastaan projektioluokka, sillä sekä yhdensuuntais- että keskusprojektiio voidaan valita monella eri tavalla. Karkeasti luonnehdittuna keskusprojektiio tuottaa havainnollisempia kuvia kuin yhdensuuntaisprojektiio, mutta yhdensuuntaisprojektiokuvista kohteen mittojen selvittäminen on helpompaa.

Keskusprojektiokuvien (tai perspektiivikuvien) piirtäminen on yleensä vaikeampaa kuin yhdensuuntaisprojektiokuvien (aksonometristen kuvien), mutta tästä erosta tulee merkityksetön, jos kuvat tehdään laskemalla.



Kuva 1.2: Yhdensuuntaisprojektiio

Yhdensuuntaisprojektiokuvauksen p (kuva 1.2) lähtöjoukkona on periaatteessa koko kolmiulotteinen avaruus E^3 (symboli E Eukleideen mukaan) ja maalijoukkona jokin avaruuteen E^3 asetettu taso, jota kutsutaan *kuvatasoksi* ja merkitään kreikkalaisella kirjaimella Π (iso pii). Matemaattisin merkinnöin ilmaistuna kyseessä on kuvaus eli funktio $p : E^3 \rightarrow \Pi$.

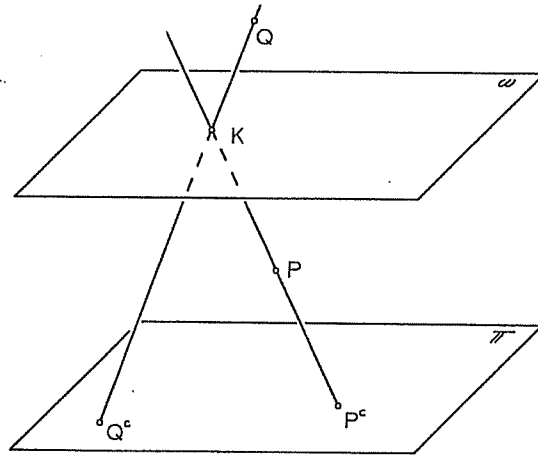
Avaruuden E^3 pisteen P (merkintä $P \in E^3$) kuva P' (joka sijaitsee kuvatasossa, ts. $P' \in \Pi$) määräytyy seuraavalla tavalla:

Olkoon s kiinteä suora, joka ei ole kuvatason Π suuntainen, ts. $s \not\parallel \Pi$. Tämä määrää *projektiösäteiden* suunnan. Pisteestä P kautta asetetaan suoran s suuntainen suora s_P . Koska s_P ei ole kuvatason suuntainen, se leikkaa kuvatason jossakin pisteessä. Tämä olkoon kuvapiste P' . Symbolein¹:

$$p(P) = P' = s_P \cap \Pi.$$

Pistettä P' kutsutaan paitsi pisteen P kuvaksi myös pisteen P *projektioksi* kuvatasossa.

Luonnollisinta on valita suora s siten, että se on kohtisuorassa kuvatasoa Π vastaan, $s \perp \Pi$. Välttämätöntä tämä ei kuitenkaan ole. Jos $s \perp \Pi$, sanotaan, että kyseessä on *ortogonaaliprojektio*. Jos näin ei ole, projektio on *vino*.



Kuva 1.3: Keskusprojektio

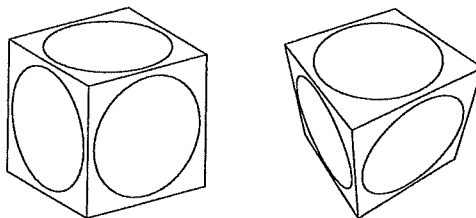
Keskusprojektiokuvauksessa p (kuva 1.3) kolmiulotteiseen avaruuteen asetetaan *kuvataso* Π kuten yhdensuuntaisprojektiiossakin, mutta kiinteän suoran sijasta valitaan kiinteä piste K , jota kutsutaan *projektiokeskukseksi*. Tämä ei saa sijaita kuvatasossa, ts. $K \notin \Pi$. Avaruuden piste P projisoidaan kuvatasoon Π asettamalla pisteiden K ja P kautta suora KP ja määrittämällä tämän leikkauspiste kuvatason kanssa. Kuvapistettä (eli projektiopistettä) merkitään keskusprojektion tapauksessa yleensä P^c , jolloin

$$p(P) = P^c = KP \cap \Pi.$$

¹Symboli \cap on joukko-opillinen leikkausjoukon merkki, ts. $A \cap B$ tarkoittaa joukkojen A ja B yhteisten pisteiden muodostamaa joukkoa. Jos A on suora ja B on taso, on $A \cap B$ siten suoran ja tason leikkauspiste tai A , jos suora A on tasossa B .

Projektiopistettä P^c ei kuitenkaan ole olemassa, jos suora KP sattuu olemaan kuvatason suuntainen. Tämä merkitsee, että — toisin kuin yhdensuuntaisprojektiossa — kaikilla avaruuden E^3 pisteillä ei ole kuvapistettä. Projektion lähtöjoukosta onkin tämän takia poistettava kuvatason Π suuntainen projektiokeskuksen K kautta kulkeva taso ω (oomega): kyseessä on kuvaus² $p : E^3 \setminus \omega \rightarrow \Pi$. Tasoa ω kutsutaan (myöhemmin ilmenevistä syistä, s. 25) *katoamistasoksi*.

Projisioitava piste voi periaatteessa sijaita kummalla puolella tahansa katoamistasoa (kuvan 1.3 pisteet P ja Q). Jos molemmat puolet otetaan huomioon, on tapana puhua *keskusprojektiokuvasta*. Usein kuitenkin tarkastelu rajoitetaan vain katoamistason jompaankumpaan puoleen (tai vieläkin rajoitetumpaan avaruuden osaan), jolloin käytetään nimitystä *perspektiivikuva*.



Kuva 1.4: Aksonometrinen kuva ja perspektiivikuva kuutiosta

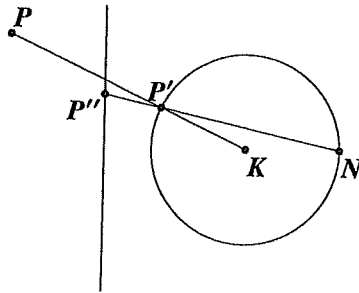
Kuvassa 1.4 on sama kuutio projisioituna eräällä yhdensuuntais- ja eräällä keskusprojektiolla. Aksonometrinen kuva ja perspektiivikuva saattavat siis näyttää esimerkiksi tällaisilta.

Yhdensuuntais- ja keskusprojektion lisäksi projektiokuvaus voidaan muodostaa monella muullakin tavalla. Näitä kutsutaan yleensä *käyräviivaisiksi projektioksi*, koska niissä suorat viivat yleensä kaartuvat jollakin tavalla.

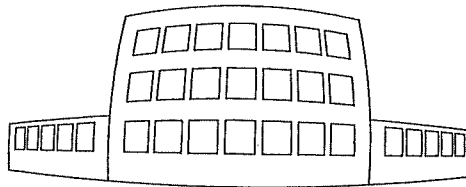
Stereografisessa projektiossa piste P projisoidaan ensin pallopinnalle pisteeksi P' käyttäen keskusprojektiota, jonka keskus on pallon keskipisteessä K . Kuvataso Π asetetaan kohteen kanssa samalle puolen palloa. Piste P' projisoidaan kuvatasoon pisteeksi P'' keskusprojektiolla, jonka keskuksena on kuvatasoon nähden vastakkainen pallon pinnan piste N (kuva 1.5).

Tuloksena syntyy kuva, jossa kohteen suorat viivat näkyvät ympyränkaarina (tai erikoistapauksessa suorina viivoina). Kuva 1.6 esittää yksinkertaisen rakennuksen julkisivua stereografisessa projektiossa. Kuva on liioitellun jyrkkä, jotta projektion ominaisuudet tulevat esiin. Kuvassa 1.7 projektiota on käytetty luonnollisemmalla tavalla.

²Joukko-opillinen merkintä $A \setminus B$ tarkoittaa niiden pisteiden joukkoa, jotka kuuluvat joukkoon A , mutta eivät kuulu joukkoon B .



Kuva 1.5: Stereografisen projektion muodostaminen



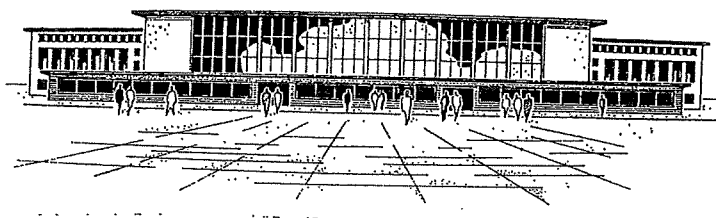
Kuva 1.6: Stereografinen projektio rakennuksen julkisivusta

Panoraamaprojektioksi kutsutaan usein keskusprojektiota, jossa projisiointi tapahtuu tason sijasta lieriöpinnalle. Projektiokeskus sijaitsee lieriön akselilla (kuva 1.8). Luontevaa on ajatella, että lieriön akseli on pystysuora, jolloin lieriöpinnalle saadaan projisioituksi katsojaa ympäröivä näkymä. Tasokuva saadaan leikkaamalla lieriöpinta auki jotakin pinnan sivujanaa pitkin ja taivuttamalla pinta tasoksi.

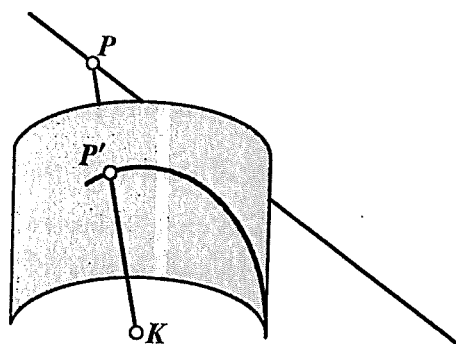
Esimerkkinä panoraamaprojektiosta on sama rakennuksen julkisivu kuin stereografisen projektion tapauksessa (kuva 1.9).

Stereografisen projektion ja panoraamaprojektion ominaisuuksia tai muodostamista ei tässä esityksessä enempää käsitellä.

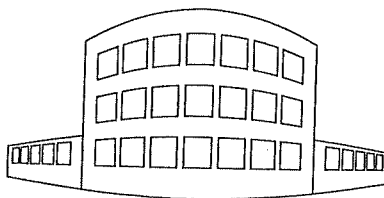
1.2 Projektio kuvaukset



Kuva 1.7: Stereografinen projektio, Wienin rautatieasema (Teoksesta Hohenberg, Konstruktive Geometrie in der Technik, Springer-Verlag 1961; kustantajan luvalla)



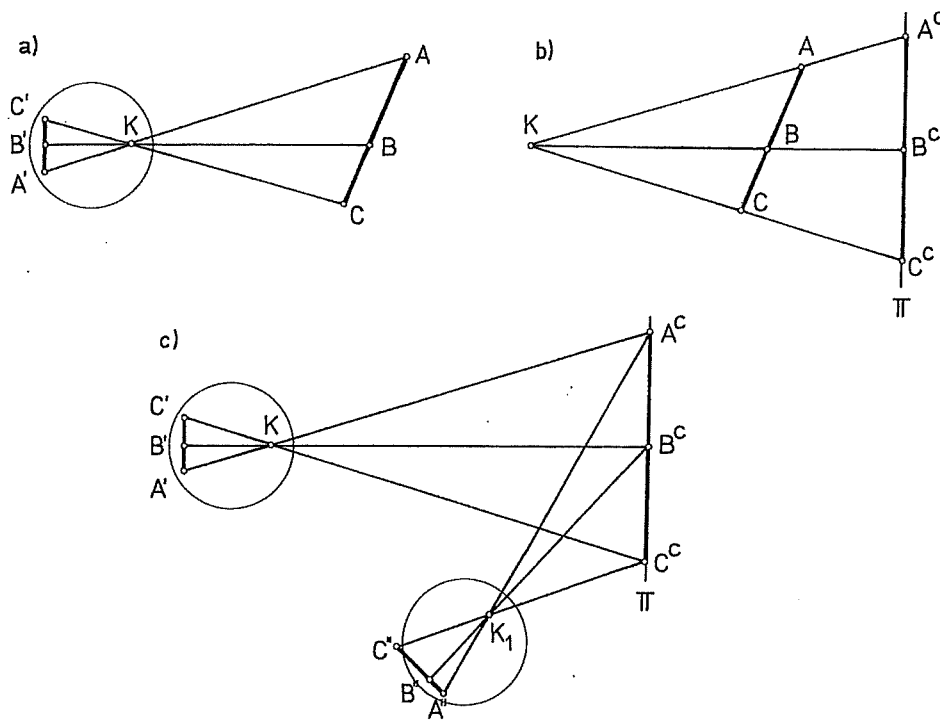
Kuva 1.8: Panoraama- eli lieriöprojektion muodostaminen



Kuva 1.9: Panoraamaprojektio rakennuksen julkisivusta

1.3 Kuvan katsominen

Hieman karkeistaen voidaan ihmissilmää pitää optisena systeeminä, jossa kolmiulotteisesta kohteesta muodostetaan kuva verkkokalvolle. Kuva 1.10a esittää silmää tällaisena optisena systeeminä. Kohteena on yksinkertaisuuden vuoksi jana AC ja sillä oleva piste B . Verkkokalvo on oletettu tasoksi tarkkanäkemisen alueella.



Kuva 1.10: Kuvan muodostuminen silmässä ja perspektiivikuva

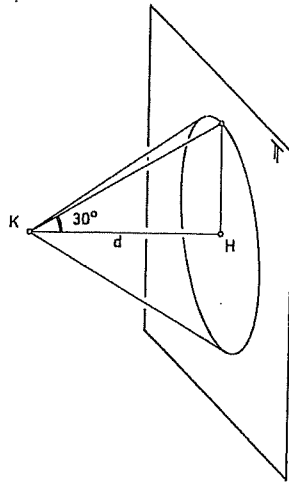
Jos kohteesta muodostetaan perspektiivikuva katselusuuntaa vastaan kohtisuoralle tasolle pitäen silmän linssin optista keskipistettä projektiokeskuksena (kuva 1.10b) ja tätä kuvaa sen jälkeen katsotaan kohtisuorasti projektiokeskuksesta, syntyy verkkokalvolle samanlainen kuvio kuin alkuperäisestä kohteesta (kuva 1.10c). Geometrisessa mielessä alkuperäisen kohteen ja sen perspektiivikuvan katsominen antavat siis saman vaikutelman.

Oleellista on, että perspektiivikuvaa katsotaan kohtisuorasti ja oikealta etäisyydeltä. Muutoin kuva vääristyy, kuten kuvan 1.10c pisteeseen K_1 asetettu 'silmiä' osoittaa: pisteen B kuva B'' ei enää osukaan kuvajanan $A''B''$ keskipisteeksi.

1.3 Kuvan katsominen

Näkeminen ja kuvien katsominen ei kuitenkaan ole pelkkää geometriaa, vaan aivot tulkitsevat verkkokalvolle syntyneen kuvan aiemman kokemuksen valossa. Pienistä vääristymistä ei tämän johdosta olekaan haittaa, vaan kuva ymmärretään silti oikein.³

Perspektiivikuvan muodostaminen voi tapahtua myös valokuvaamalla. Kamera on optinen systeemi, joka melko tarkoin noudattaa keskusprojektion periaatetta. Laajakulma- ja teleobjektiivikuvissa ilmenevä kuvan jyrkkyys tai liistyminen johtuu siitä, että kuvaa ei yleensä katsota oikealta etäisyydeltä (objektiivin polttoväli skaalattuna kuvan kokoa vastaavasti).



Kuva 1.11: Näkökartio

Verkkokalvo ei ole täysin taso edes näkemisen keskeisellä alueella, eikä ihminen näe tarkasti kovinkaan laajaa aluetta katsetta kääntämättä. Tämän johdosta luonnolliseen vaikutelmaan pyrkivään perspektiivikuvaan ei ole syytä sisällyttää liian laajaa aluetta katoamistason rajaamasta puoliavaruudesta. Yleensä tyydytään ns. *näkökartion* sisäpuoliseen alueeseen.

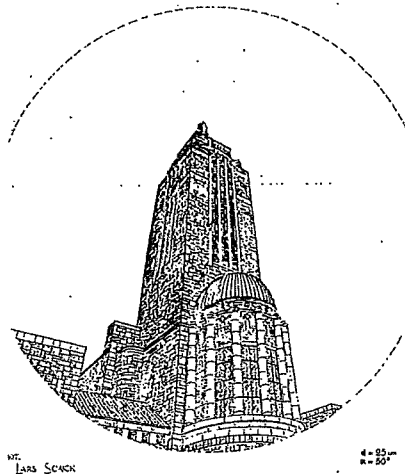
Näkökartion kärki sijaitsee projektiokeskuksessa K (katselupisteessä) ja sen akselina on projektiokeskuksesta kuvatasolle asetettu normaali KH , *pääsäde*.

³Aiempi kokemus voi myös johtaa aivot tulkitsemaan syntyneen kuvan väärin. Tiedekeskus Heurekaan oven ulkopuolella on — ainakin näennäisesti — kaksi kuutiota, jotka näyttävät kääntyvän, kun katsoja kulkee riittävän etäällä niiden sivuitse. Kappaleet eivät kuitenkaan ole kuutioita, vaan hieman vääristyneitä kolmen tason muodostamia koveria soppia. Katsoja kuitenkin tulkitsee ne tutummiksi kuutioiksi. Virhetulkinnan seurauksena kappaleet näyttävät kääntyvän. Jos ne hahmotetaan oikein, on selvää, että mitään kääntymistä ei tapahdu.

Piste H on normaalin kantapiste kuvatasossa, ja siitä käytetään nimitystä *pääpiste*. Janan KH pituus d on kuvan katseluetaisyys eli *distanssi*. (Kuva 1.11.)

Näkökartion akselin ja sivuviivan välisen kulman suuruudeksi valitaan yleensä noin 30° lähinnä kokemukseen perustuen. Tällöin näkökartio rajaa kuvatasosta ympyränmuotoisen alueen, jonka sisään perspektiivikuvan tulisi ainakin pääpiirteissään mahtua, jotta häiritseviä vääristymiä ei synny.

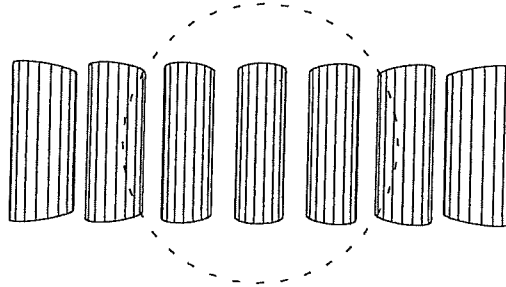
Kuvassa 1.12 on näkökartion pohjaympyrän sisään rajattuna Helsingin Kallion kirkon torni. Kyseessä on ns. sammakkoperspektiivikuva, jossa pääsäde suuntautuu yläviistoon. Näkökartion pohjaympyrän ulkopuolelle ulottuva perspektiivikuva vääristyy reunoiltaan sitä enemmän, mitä ulommas kuva ulottuu. Kaavamaisena esimerkkinä on kuva 1.13, jossa on seitsemän samanlaisen poikkileikkaukseltaan ympyrän muotoisen pylvään muodostama rivi. Näkökartion pohjaympyrän ulkopuolella pylväät näyttävät paksummilta ja poikkileikkaus vaikuttaa pikemminkin ellipsin muotoiselta.



Kuva 1.12: Sammakkoperspektiivikuva Kallion kirkosta ja näkökartion pohjaympyrä

Yhdensuuntaisprojektiota voidaan pitää keskusprojektion rajatapauksena, jossa projektiokeskus on äärettömän kaukana. Mitä kauemmaksi projektiokeskus siirtyy, sitä enemmän kohteeseen liittyvät projektiosäteet kääntyvät yhdensuuntaisiksi, ja lopulta päädytään yhdensuuntaisprojektiioon.

Koska perspektiivikuva on luonnollisimmillaan, kun sitä katsellaan projektiokeskuksesta, tulisi yhdensuuntaisprojektiokuvaa — aksonometrasta kuvaa — katsella äärettömän kaukaa tai ainakin mahdollisimman kaukaa projektiosäteiden suunnasta. Koska näin ei ole mahdollista tai ainakaan järkevää tehdä,

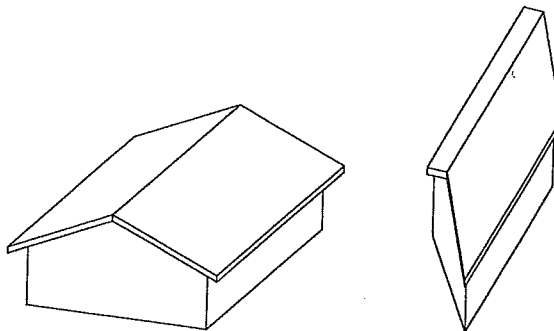


Kuva 1.13: Pylväsriivi, joka vääristyy näkökartion pohjaympyrän ulkopuolella

aksonometrinen kuva näyttää yleensä jollakin tavoin vääristyneeltä.

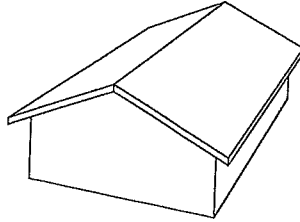
Kuvassa 1.14 on vasemmalla harjakattoinen talo esitettyä ns. dimetrisessä ortogonaaliprojektiossa. Koska kyseessä on ortogonaaliprojektio, ts. kuvataso on kohtisuorassa projektiosäteitä vastaan, kuvaa tulisi katsoa kohtisuorasti kuvan tasoa vastaan ja mahdollisimman kaukaa. Lähempää katsottuna talo näyttää lievästi vääristyneeltä: takaosa näyttää etuosaa leveämmältä. Kuvasta mittamalla voi kuitenkin todeta, että näin ei ole.

Jos yhdensuuntaisprojektiio on vino — projektiosäteet vinossa kuvatasaan vastaan — kuva tulisi katseltaessa myös kallistaa sopivalla tavalla vinoon. Oikeanpuoleisessa kuvassa 1.14 on sama talo, mutta vinolla yhdensuuntaisprojektiolla projisioituna. Lukija voi yrittää katsoa kuvaa vinosti sellaisesta suunnasta, että talo näyttää luonnolliselta! (Oikean suunnan määrittämistä käsitellään kohdassa 5.3.) Vertailun vuoksi on saman talon perspektiivikuva kuvassa 1.15.



Kuva 1.14: Aksonometrisia kuvia: dimetrinen ortogonaaliprojektio ja eräs vino projektio

Koska näkökartion sisään rajatut perspektiivikuvat näyttävät aksonometrisia



Kuva 1.15: Perspektiivikuva

kuvia luonnollisemmilta, voidaan kysyä, tarvitaanko jälkimmäisiä lainkaan. Aiemmin aksonometrisia kuvia on käytetty usein sen takia, että niiden piirtäminen geometrisin menettelyin on helpompaa kuin perspektiivikuvien piirtäminen. Tietotekniikan kehitys on paljolti poistanut tämän perusteen: jos kuva tehdään laskemalla, pienet erot tarvittavan laskennan määrässä eivät ole merkittäviä. Käsien piirrettäessä ero tietenkin on edelleen olemassa. Aksonometrisilla kuvilla on kuitenkin toinenkin etu: kohteen mittasuhteiden määrittäminen niistä on perspektiivikuvia helpompaa.

1.3 Kuvan katsominen
