Timo Mäkelä

Tekninen matematiikka

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIISILASKENTA

Tammertekniikka

10 MATRIISILASKENTA

10.1 PERUSMÄÄRITELMIÄ

Suorakulmion muotoon järjestetty $m \cdot n$ luvun kaavio

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{tai} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

Kaarisulkujen sijaan käytetään myös hakasulkuja matriisin alkioiden ympärillä.

on $m \times n$**-matriisi**. Luvut A_{11}, $A_{12}, \ldots, A_{mn}$ ovat **matriisin alkioita**. Tässä matriisissa on m **riviä (vaakariviä)** ja n **saraketta (pystyriviä)**. Matriisin sanotaan olevan **kertalukua** $m \times n$.

Matriisin alkiot A_{ij} indeksoidaan siten, että

- ensimmäinen indeksi i ilmoittaa rivin
- toinen indeksi j sarakkeen.

Alkiot voivat olla reaali- tai kompleksilukuja.

Esim. 10.1 Matriisi $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ on kertalukua 2×3, sillä siinä on 2 riviä ja 3 saraketta.

Matriisin kaavioesitys korvataan usein seuraavilla merkinnöillä:

$$\boldsymbol{A} = (A_{ij})_{m \times n}$$

$$\boldsymbol{A}_{m \times n} = (A_{ij})$$

$\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, kun kertaluku $m \times n$ on muuten selvä.

Kaksi matriisia ovat **yhtäsuuret**, jos ne ovat samaa kertalukua ja niiden vastinalkiot ovat yhtäsuuret:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow A_{ij} = B_{ij} \quad \text{kaikilla } i, j$$

10.2 MATRIISITYYPPEJÄ

Neliömatriisi on matriisi, jossa rivien ja sarakkeiden lukumäärä on sama eli matriisi, joka on kertalukua $n \times n$, jollain n. Neliömatriisin **päälävistäjä** on matriisin vasemman ylänurkan ja oikean alanurkan välinen vino rivi. Päälävistäjä muodostuu siis alkioista $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn}$.

Neliömatriisia, jossa nollasta eroavia alkioita on ainoastaan päälävistäjällä, sanotaan **lävistäjämatriisiksi** eli **diagonaalimatriisiksi**. Lävistäjämatriisille käytetään usein yksinkertaista indeksointia ja seuraavaa merkintää:

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}=\ulcorner A_1, A_2, \ldots, A_n \lrcorner$$

Yksikkömatriisi $\boldsymbol{I}_n$ tai $\boldsymbol{E}_n$ on $n{\times}n$-lävistäjämatriisi, jonka kaikki lävistäjäalkiot ovat ykkösiä. Käytetään myös merkintää $\boldsymbol{I}$ tai $\boldsymbol{E}$, kun kertaluku on muuten selvä. Siis

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{I}=(\delta_{ij}),\ \text{missä}\ \delta_{ij}=\begin{cases}1, \text{ jos } i=j \\ 0, \text{ jos } i\neq j\end{cases}$$ (**Kroneckerin delta**).

Esim. 10.2

$$\boldsymbol{I}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\ulcorner 1,1,1 \lrcorner$$

Nollamatriisissa $\boldsymbol{0}$ kaikki alkiot ovat nollia.

Matriisia, jossa on vain yksi sarake, sanotaan **pystyvektoriksi**. Pystyvektoria merkitään alaviivalla.

$$\underline{X}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Vaakavektori on matriisi, jossa on vain yksi rivi:

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_n \end{pmatrix}.$$

Avaruusvektorit $a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ voidaan samaistaa

- joko kolmirivisten pystyvektorien kanssa: $a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$
- tai kolmisarakkeisten vaakavektorien kanssa: $a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\lfloor a_x \quad a_y \quad a_z \rfloor$

Tasovektorit $a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}$ voidaan vastaavasti samaistaa

- joko kaksirivisten pystyvektorien kanssa: $a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$
- tai kaksisarakkeisten vaakavektorien kanssa: $a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix} a_x & a_y \end{pmatrix}$.

Laskin TI-89:

- Matriisi syötetään hakasulkujen väliin; alkiot erotetaan pilkulla, rivit puolipisteellä:

  Esimerkiksi matriisi $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ syötetään seuraavasti: [2, –1, 3; 3, 0,5].

- Sisäisesti matriisit esitetään hakasulkujen välissä siten, että rivit on hakasulkujen sisällä.

  Esimerkiksi yllä oleva matriisi on muotoa [[2, –1, 3][3, 0,5]]

- Vektorit esitetään vaakavektoreina.
- Matriisin alkioihin viitataan ilmoittamalla hakasuluissa alkion rivi- ja sarakeindeksi: esim. a[1,3].
- Matriisilaskentaan liittyviä operaatioita löytyy komennolla **2nd MATH: 4:Matrix**. Yleisimmin käytetyt matriisilaskennan komennot lienee paras sijoittaa omaan Custom-valikkoon.
- Yksikkömatriisi I_n määritetään funktiolla **identity**(n).
- Lävistäjämatriisi voidaan muodostaa komennolla **diag**(list), missä list lävistäjäalkioista muodostettu lista: esim. diag({1, 2, 5})
- $m\times n$-satunnaismatriisi muodostetaan funktiolla **randMat**(m,n). Tämän matriisin alkiot ovat kokonaislukuja välillä –9 ... 9.

10.3 LASKUTOIMITUKSET

Matriiseille voidaan määritellä laskutoimitukset, jotka muistuttavat vastaavia lukujen laskutoimituksia. Laskutoimituksia rajoittaa *matriisien kertalukujen yhteensopivuus*.

10.3.1 Matriisin kertominen luvulla

Matriisi $A = (A_{ij})$ kerrotaan luvulla k siten, että jokainen alkio kerrotaan tällä luvulla:

$$kA = Ak = (kA_{ij}).$$

Matriisin vastamatriisi määritellään seuraavasti:

$$-A = (-1)A$$

Esim. 10.3

$$0{,}4\begin{pmatrix} 2 & 0{,}8 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4\cdot 2 & 0{,}4\cdot 0{,}8 \\ 0{,}4\cdot(-1) & 0{,}4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}32 \\ -0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

10.3.2 Yhteen- ja vähennyslasku

Matriisien yhteen- ja vähennyslasku on määritelty, jos matriiseilla on *sama kertaluku.* Yhteenlaskussa vastinalkiot lasketaan yhteen; vähennyslaskussa vastinalkiot vähennetään.

Kahden $m \times n$-matriisin $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ ja $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ summa ja erotus määritellään siis seuraavasti:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (A_{ij} + B_{ij})$$
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (A_{ij} - B_{ij})$$

Esim. 10.4

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & 2+2 & 1+2 \\ 4+1 & 5+2 & 6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = 2\begin{pmatrix} 2-5 \\ 1-(-3) \\ -2-(-2) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10.3.3 Kertolasku

Kaksi matriisia voidaan kertoa keskenään, jos *kertojassa on yhtä monta saraketta kuin kerrottavassa rivejä.* Kertolasku määritellään seuraavasti:

Olkoon $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ kertalukua $m \times k$ ja $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ kertalukua $k \times n$ oleva matriisi. Tällöin tulo AB on kertalukua $m \times n$ oleva matriisi $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$, jonka alkiot lasketaan seuraavasti:

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{ik}B_{kj} = \sum_{s=1}^{k} A_{is}B_{sj}$$

Tulossa $\boldsymbol{AB}$ on siis

- yhtä monta *riviä* kuin matriisissa $\boldsymbol{A}$
- yhtä monta *saraketta* kuin matriisissa $\boldsymbol{B}$

Tulon i:nnen rivin ja j:nnen sarakkeen alkio on $\boldsymbol{A}$:n i:nnen rivin ja $\boldsymbol{B}$:n j:nnen sarakkeen vastinalkioiden tulojen summa.

Esim. 10.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 1 & 1\cdot 4+2\cdot 2 \\ 4\cdot 3+5\cdot 1 & 4\cdot 4+5\cdot 2 \\ 3\cdot 3+6\cdot 1 & 3\cdot 4+6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 17 & 26 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

Esim. 10.6
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -8 & 12 & -2 \\ -5 & 5 & 43 & -5 \end{pmatrix}$$

Tulon 1.rivin ja 3.sarakkeen alkio on laskettu seuraavasti:

$$C_{13} = 1\cdot 0 + 2\cdot 7 + (-1)\cdot 2 = 12$$

Tulon 2.rivin ja 4.sarakkeen alkio on laskettu seuraavasti:

$$C_{24} = 3\cdot 0 + 5\cdot(-1) + 4\cdot 0 = -5$$

Koska $m\times n$-matriisin ja $n\times 1$-matriisin tulo on $m\times 1$-matriisi on **matriisin ja pystyvektorin tulo pystyvektori**:

$$A\underline{X} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \cdots + A_{1n}X_n \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \cdots + A_{2n}X_n \\ \vdots \\ A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \cdots + A_{mn}X_n \end{pmatrix}$$

Seuraavassa on esitetty matriisien laskutoimitusten ominaisuudet.

Olkoot $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ ja yksikkömatriisi $\boldsymbol{I}$ kertaluvultaan sellaisia matriiseja, joille merkityt laskutoimitukset voidaan muodostaa. Tällöin on

1.	$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$
2.	$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$
3.	$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$
4.	$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$
5.	$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$
6.	$\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A}$
7.	$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$, ($k$ skalaari)

Liitäntälakien ansiosta matriisien tulo ja summa voidaan kirjoittaa ilman sulkuja esim. $\boldsymbol{ABC}$ ja $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$. Neliömatriisin A kertominen itsellään ilmaistaan eksponenttimerkinnällä:

$$\boldsymbol{A}^k = \overbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}^{k\text{ kpl}}.$$

Matriisitulosta on huomattava seuraavat erikoispiirteet:

- *matriisitulo ei ole vaihdannainen*: yleensä $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$
- *matriisitulo ei noudata tulon nollasääntöä*: tulo $\boldsymbol{AB}$ voi olla nollamatriisi $\boldsymbol{0}$, vaikka $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ ja $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$.

10.4 SOVELLUKSIA

10.4.1 Kustannusten määrittäminen

Yritys valmistaa tuotteita A, B ja C. Tuotteet kootaan kolmenlaisista *komponenteista* a, b ja c, joita tarvitaan seuraavat määrät:

	a	b	c
A	5	3	4
B	2	3	1
C	3	4	6

Kunkin komponentin valmistamiseen tarvitaan neljää *raaka-ainetta* I, II, III, IV seuraavat määrät (yksikkö esim. kg):

	I	II	III	IV
a	3	0	1	4
b	4	1	3	2
c	4	2	0	1

Raaka-aineiden *yksikköhinnat* ovat (yksikkö esim. mk/kg):

I	119
II	68
III	91
IV	53

Näistä voidaan muodostaa kolme matriisia:

- *Komponenttimatriisi* $\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

- *Raaka-ainematriisi* $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- *Hintamatriisi* $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 119 \\ 68 \\ 91 \\ 53 \end{pmatrix}$

Käyttäen matriisien kertolaskusääntöä havaitaan, että

- Tulo $\boldsymbol{RH} = \begin{pmatrix} 660 \\ 923 \\ 665 \end{pmatrix}$ antaa *komponenttien* a, b ja c *materiaalikustannukset* pystyvektorina
- Tulo $\boldsymbol{KR} = \begin{pmatrix} 43 & 11 & 14 & 30 \\ 22 & 5 & 11 & 15 \\ 49 & 16 & 15 & 26 \end{pmatrix}$ antaa *tuotteiden* A, B ja C valmistamiseen *tarvittavat raaka-ainemäärät* siten, että riveillä ovat tuotteet ja sarakkeilla raaka-aineet.
- Tulo $\boldsymbol{KRH} = \begin{pmatrix} 8729 \\ 4754 \\ 9662 \end{pmatrix}$ antaa *tuotteiden* A, B ja C *materiaalikustannukset* pystyvektorina.

Laskin TI-89:

➢ Matriisien laskutoimitukset muodostetaan luonnollisella tavalla käyttäen merkkejä +, –, *, ^.

Harjoitustehtäviä

10.1 Olkoot

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x+y & 3 \\ -2 & x-y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Voidaanko luvut x ja y valita siten, että a) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ b) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}$?

10.2 Olkoot $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ ja $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Määritä $2\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{B}$ sekä $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$.

10.3. Olkoot $A = \begin{pmatrix} 1-i & 5 & i \\ 0 & 3+i & -i \end{pmatrix}$. Määritä $(1+i)A$.

10.4 Suorita kertolaskut

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

10.5 Suorita kertolaskut

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

10.6 Olkoot $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Määritä AB ja BA.

10.7 Olkoot $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Määritä AB ja BA.

10.8 Osoita, että kaikille 3×3-matriiseille on voimassa $IA = AI = A$.

10.9 Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Määritä A^2 ja A^3.

10.10 Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Laske seuraavista tuloista ne, jotka ovat määriteltyjä: AB, BA, AC, CA, BC, CB.

10.11 Olkoot

$$D = \lceil D_1, D_2, D_3 \rfloor \text{ ja } A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 & B_3 \end{pmatrix}$$

Määritä tulot DA *ja* AD. *Esitä tulos sanoin.*

10.12 Osoita, että

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

10.13 Millä ehdolla $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$?

10.14 Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

ja $F(x)$ jokin x:n polynomi. Osoita, että

a) $$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1{}^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2{}^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3{}^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

b) $$F(A) = \begin{pmatrix} F(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & F(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & F(\lambda_3) \end{pmatrix}.$$

10.5 MATRIISIN OSITTAMINEN

Matriisin **osituksessa** matriisi jaetaan vaaka- ja pystysuunnassa osiin, joista kukin muodostaa matriisin.

Tässä esitetään vain matriisin ositus pystyvektoriensa avulla.

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Merkitään **matriisin A pystyvektoreita**

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix}, \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \underline{A}_n = \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Tällöin matriisi A voidaan esittää pystyvektoriensa avulla ositetussa muodossa

$$A = \begin{pmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_n \end{pmatrix}.$$

Olkoon nyt $\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ $n \times 1$-pystyvektori. Lasketaan tulo

$$A\underline{X} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \cdots + A_{1n}X_n \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \cdots + A_{2n}X_n \\ \vdots \\ A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \cdots + A_{mn}X_n \end{pmatrix}$$

$$= X_1 \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{m1} \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + X_n \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ \vdots \\ A_{mn} \end{pmatrix} = X_1\underline{A}_1 + X_2\underline{A}_2 + \cdots + X_n\underline{A}_n$$

Esitystä $X_1\underline{A}_1 + X_2\underline{A}_2 + \cdots + X_n\underline{A}_n$ sanotaan vektoreiden $\underline{A}_1, \underline{A}_2, \ldots, \underline{A}_n$ **lineaarikombinaatioksi.**

Voidaan siis todeta, että *matriisin ja pystyvektorin tulo on matriisin pystyvektoreiden lineaarikombinaatio*:

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \cdots & \underline{A}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = X_1\underline{A}_1 + X_2\underline{A}_2 + \cdots + X_n\underline{A}_n$$

Usein matriisin ja pystyvektorin tulo kannattaa hahmottaa tällä tavalla.

Esim. 10.7 Olkoon $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Tällöin on $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

10.6 MATRIISIN TRANSPOOSI

Matriisin $A = (A_{ij})_{m\times n}$ **transponoitu matriisi** eli **transpoosi** on

$A^T = (B_{ij})_{n\times m}$, jossa $B_{ij} = A_{ji}$.

Matriisin transponoinnissa muutetaan siis rivit sarakkeiksi tai sarakkeet riveiksi järjestys säilyttäen.

Esim. 10.8 $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 6 & 8 & 15 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 8 \\ -2 & 15 \end{pmatrix}$.

Pystyvektorin transpoosi on vaakavektori ja *vaakavektorin transpoosi on pystyvektori*:

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X}^T = (X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n)$$

Neliömatriisi A on **symmetrinen**, jos $A^T = A$. Symmetrisen matriisin alkioille pätee $A_{ij} = A_{ji}$ kaikilla i ja j eli alkiot sijaitsevat symmetrisesti päälävistäjän suhteen.

Esim. 10.9 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ on symmetrinen.

Seuraavassa on esitetty matriisin transponointiin liittyviä tuloksia.

Olkoot A ja B kertaluvultaan sellaisia matriiseja, että merkityt laskutoimitukset voidaan muodostaa. Tällöin on

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(kA)^T = kA^T$, (k skalaari)
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Laskin TI-89:

- Matriisin transpoosi muodostetaan komennolla **2^nd^ MATH: 4:Matrix: 1:^T^**
- Pystyvektori voidaan syöttää laskimeen vaakavektorin transpoosina.

Esim. 10.10 $[1, 3, 5]^T$

Harjoitustehtäviä

10.15 Olkoon $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

a) *Osita matriisi A pystyvektoriensa avulla. Mitkä ovat pystyriviosituksen pystyvektorit?*

b) Osita matriisi A vaakavektoriensa avulla. Mitkä ovat vaakariviosituksen vaakavektorit?

10.16 Osoita, että jos A ja $\boldsymbol{B}$ ovat symmetrisiä matriiseja, niin $A + \boldsymbol{B}$ on symmetrinen matriisi.

10.17 Olkoon A neliömatriisi. Osoita, että matriisit AA^T, A^TA ja $A + A^T$ ovat symmetrisiä matriiseja.

10.18 Olkoon $A = [\underline{A}_1 \quad \underline{A}_2 \quad \cdots \quad \underline{A}_n]$ matriisin A pystyriviositus. Määritä matriisin A^T vaakariviositus.

10.19 Olkoon $A = [\underline{A}_1 \quad \underline{A}_2 \quad \underline{A}_3]$ pystyriviositus ja $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{B}}_1{}^T \\ \underline{\boldsymbol{B}}_2{}^T \\ \underline{\boldsymbol{B}}_3{}^T \end{pmatrix}$ vaakariviositus. Muodosta matriisitulo $\boldsymbol{B}A$. (A ja $\boldsymbol{B}$ ovat neliömatr.)

10.20 Olkoon A n-neliömatriisi ja $\underline{X}$ n-pystyvektori. Mitä kertalukua on matriisi $\underline{X}^T A \underline{X}$? Määritä $\underline{X}^T A \underline{X}$, kun

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ ja } \underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

10.7 MATRIISIN DETERMINANTTI

Jokaiseen neliömatriisiin liittyy luku, jota sanotaan **determinantiksi**.

Kaksirivisen matriisin $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ determinantilla tarkoitetaan lukua

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}.$$

Yleisesti determinantin arvo voidaan laskea kehittämällä se jonkin rivin tai sarakkeen suhteen.

Olkoon $A = (A_{ij})$ neliömatriisi. Alkion A_{ij} **alideterminantti** D_{ij} saadaan poistamalla $\det(A)$:sta i:s rivi ja j:s sarake. Alkion A_{ij} **komplementti** on

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}.$$

Etumerkki $(-1)^{i+j}$ on helppo ottaa seuraavasta merkkikaaviosta

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

Determinantin kehittämisellä i:nnen rivin suhteen tarkoitetaan lauseketta

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}C_{ik} = A_{i1}C_{i1} + A_{i2}C_{i2} + \cdots + A_{in}C_{in}$$

ja determinantin kehittämisellä j:nnen sarakkeen suhteen tarkoitetaan lauseketta

$$\sum_{k=1}^{n} A_{kj}C_{kj} = A_{1j}C_{1j} + A_{2j}C_{2j} + \cdots + A_{nj}C_{nj}.$$

Voidaan osoittaa, että kaikkien näiden lausekkeiden arvo on sama, **matriisin A determinantin arvo**. Matriisin A determinanttia merkitään $\det(A)$ tai $|A|$. Kaaviona esitetyn matriisin determinanttimerkintä saadaan korvaamalla kaarisulut pystyviivalla.

Esim. 10.11 Lasketaan matriisin $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -4\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & -3\end{pmatrix}$ determinantti kehittämällä se ensimmäisen vaakarivin suhteen:

$$\begin{vmatrix}2 & 5 & -4\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & -3\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & -3\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -3\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$

$$= 2(3-8)-5(-3-6)-4(4+3) = 7$$

Determinantti kannattaa kehittää sellaisen rivin tai sarakkeen suhteen, jossa *on mahdollisimman paljon nollia*:

Esim. 10.12 Seuraava determinantti kehitetty toisen pystyrivin suhteen.

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & 0 & 6\\ 14 & 2 & 22\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{vmatrix} = -2(6-10) = 8$$

Seuraavassa on esitetty joitain determinantin ominaisuuksia.

1. Determinantin *arvo säilyy*, jos
- vaakarivit vaihdetaan järjestys säilyttäen pystyriveiksi.
- jonkin rivin alkioihin lisätään toisen rivin alkiot vakiolla kerrottuna.
2. Determinantin *arvo muuttuu vastaluvukseen*, jos
- kaksi riviä vaihdetaan keskenään.
3. Determinantin *arvo on nolla*, jos
- jonkin rivin kaikki alkiot ovat nollia
- determinantissa on kaksi samaa riviä.
4. Jos determinantin jonkin rivin alkioilla on *yhteinen tekijä*, voidaan se siirtää tekijäksi koko determinantin eteen.
5. Jos determinantin jonkin rivin alkiot ovat *kahden luvun summia*, voidaan determinantti kirjoittaa kahden determinantin summana.

Esim. 10.13
$$\begin{vmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

Kohdan 1 perusteella voidaan eo. ominaisuuksissa sanan "rivi" korvata sanalla "sarake".

Voidaan osoittaa, että matriisien tulon determinantti on determinanttien tulo:

Jos $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ovat $n \times n$-neliömatriiseja, niin

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$$

Laskin TI-89:

- Matriisin $\boldsymbol{A}$ determinantti lasketaan komennolla **det(*A*)**.

Harjoitustehtäviä

Laske determinantit

10.21 a) $\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1-x & -x \\ x & 1-x \end{vmatrix}$

10.22 a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 15 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

10.23 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$

10.24 $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

10.8 KÄÄNTEISMATRIISI

Käänteismatriisilla on matriisilaskennassa sama merkitys kuin käänteisluvulla algebrassa. Käänteismatriisilla kertomista voidaan pitää matriisilla jakamisena.

Neliömatriisia $\boldsymbol{A}$ sanotaan **ei-singulaariseksi**, jos on olemassa samaa kertalukua oleva matriisi $\boldsymbol{B}$ siten, että

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}.$$

Matriisia $\boldsymbol{B}$ kutsutaan matriisin A **käänteismatriisiksi** eli **inverssiksi** ja sille käytetään merkintää A^{-1}.

Jos matriisilla A on käänteismatriisi, niin

$$AA^{-1} = \boldsymbol{I}.$$

Ottamalla determinantti puolittain, saadaan

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1.$$

Siis $\det(A) \neq 0$. Tämä pätee käänteisestikin:

> Matriisilla A on käänteismatriisi eli matriisi on ei-singulaarinen jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.

Voidaan osoittaa, että seuraava pätee:

> *Olkoot A ja $\boldsymbol{B}$ ei-singulaarisia matriiseja. Tällöin* A^{-1}, A^T ja AB ovat ei-singulaarisia ja
>
> 1. $(A^{-1})^{-1} = A$
> 2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
> 3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Harjoitustehtäviä

Laske käänteismatriisi.

10.25 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

10.26 $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

10.27 $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$

10.28 Tarkista laskimella, onko

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -11 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & -0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & -0{,}8 \\ -0{,}6 & -0{,}8 & 1{,}9 \end{pmatrix}$$

10.29 Osoita, että jos $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ ovat ei-singulaarisia matriiseja, niin tulo $\boldsymbol{AB}$ on ei-singulaarinen ja $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

10.30 Osoita, että symmetrisen matriisin inverssi on symmetrinen.

10.9 ADJUNGOITU MATRIISI

Matriisin inverssi voidaan muodostaa ns. adjungoitua matriisia käyttäen.

Jos neliömatriisissa $A = (A_{ij})$ alkiot korvataan **komplementeilla** $C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ (vrt. kappale 10.7) ja saatu matriisi transponoidaan, saadaan matriisin A:n **adjungoitu matriisi**

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Nyt pätee seuraava tulos:

Jos $\det(A) \neq 0$, niin

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

Tätä menetelmää kannattaa käyttää vain pienille matriiseille (kertaluku 2). Isomman matriisin inverssi on syytä muodostaa toisella tavalla. Käytännössä inverssi lasketaan tietokoneilla tai laskimilla.

Esim. 10.14 Määritetään 2×2-matriisin $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$ inverssi eo. menetelmällä.

Lasketaan ensin

$$\det(A)=A_{11}A_{22}-A_{21}A_{12}$$

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11}\end{pmatrix}$$

Jos $\det(A)\neq 0$,

niin $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11}\end{pmatrix}$

Esim. 10.15 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$$\det(A)=2\cdot 4-3\cdot 1=5$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}6 & 0{,}4\end{pmatrix}$$

Ei-singulaarisen lävistäjämatriisin inverssi on helppo muodostaa: otetaan lävistäjäalkioiden inverssit.

$$\lceil A_1, A_2, \ldots, A_n \rfloor^{-1}=\lceil A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_n^{-1} \rfloor$$

Laskin TI-89:

- Matriisin A käänteismatriisi on A^{-1}.

10.10 LINEAARINEN YHTÄLÖRYHMÄ

Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää, jossa on ***m* yhtälöä ja *n* tuntematonta**

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

missä $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat tuntemattomia ja suureet a_{ij} ja b_i ovat tunnettuja. Yhtälöryhmä voidaan esittää matriisimuodossa seuraavasti:

$$A\underline{X} = \underline{B}, \quad (*)$$

missä

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matriisia A sanotaan yhtälöryhmän **kerroinmatriisiksi**.

Yhtälöryhmää sanotaan **neliölliseksi**, jos tuntemattomia on yhtä monta kuin yhtälöitä. Neliöllisen yhtälöryhmän kerroinmatriisi on neliömatriisi.

Yhtälöryhmää sanotaan **homogeeniseksi**, jos oikean puolen vakiot b_i ovat nollia. Yhtälö (*) on siis homogeeninen, jos pystyvektori $\underline{B} = \underline{0}$. Homogeenisen yhtälöryhmän matriisiesitys on siten

$$A\underline{X} = \underline{0}.$$

10.11 NELIÖLLINEN YHTÄLÖRYHMÄ

Olkoon n:n yhtälön n:n tuntemattoman neliöllinen yhtälöryhmä annettu matriisimuodossa

$$A\underline{X} = \underline{B}. \quad (*)$$

Kerroinmatriisi A on n-neliömatriisi. Jos $\det(A) \neq 0$, niin matriisilla A on käänteismatriisi A^{-1}. Kerrotaan nyt yhtälö (*) puolittain käänteismatriisilla ja päätellään seuraavasti:

$$A^{-1}(A\underline{X}) = A^{-1}\underline{B}$$
$$(A^{-1}A)\underline{X} = A^{-1}\underline{B}$$
$$I\underline{X} = A^{-1}\underline{B}$$
$$\underline{X} = A^{-1}\underline{B}$$

Ratkaisu voidaan siis esittää matriisitulona $A^{-1}\underline{B}$.

Esitetään tulos täsmällisesti:

> Neliöllisellä yhtälöryhmällä
>
> $$A\underline{X} = \underline{B}$$
>
> on **1-käsitteinen ratkaisu** jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$. Tämä ratkaisu on
>
> $$\underline{X} = A^{-1}\underline{B}$$

Käytännössä tätä menetelmää ei kannata käyttää ellei käänteismatriisi ole tiedossa. Nopeampi tapa on ratkaista yhtälöryhmät Gaussin menetelmällä. Eräissä ohjelmissa (mm. Excel) ratkaistaan yhtälöryhmät kuitenkin tällä periaatteella.

Esim. 10.16 Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+2y+2z=5 \\ 3x+5y+7z=1 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$$

Matriiseja käyttäen yhtälöryhmä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Koska

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -9 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on yhtälöryhmän ratkaisu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -35 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

10.12 CRAMERIN SÄÄNTÖ

Yhtälöpari voidaan ratkaista seuraavasti determinantteja käyttäen:

Jos yhtälöparilla

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

on **yksikäsitteinen ratkaisu**, niin se on

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Ratkaisun nimittäjässä esiintyy yhtälöparin kerroindeterminantti. Ratkaisun yksikäsitteisyyden perusteella se ei ole nolla. Ratkaisun *osoittajat on saatu kerroindeterminantista vaihtamalla tuntemattoman kertoimen tilalle oikean puolen vakiot.*

Cramerin sääntö on yleistettävissä useamman tuntemattoman tapaukseen. Kuitenkin ratkaistaessa yhtälöryhmiä, joissa on vähintään kolme tuntematonta, on Gaussin menetelmä nopein tapa.

Esim. 10.17 Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$

Koska kerroindeterminantti $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, on

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{27}{7}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{7} = -\frac{8}{7}.$$

10.13 LINEAARINEN HOMOGEENINEN YHTÄLÖRYHMÄ

Koska

$$A\underline{\mathit{0}} = \underline{\mathit{0}},$$

on homogeenisella yhtälöryhmällä aina **triviaali ratkaisu** $\underline{X} = \underline{\mathit{0}}$. Tämä on yhtälöryhmän ainoa ratkaisu, jos $\det(A) \neq 0$. Saadaan tulos

Neliöllisellä homogeenisella yhtälöryhmällä $A\underline{X} = \underline{\mathit{0}}$ on **ei-triviaali** ratkaisu $\underline{X} \neq \underline{\mathit{0}}$, jos ja vain jos $\det(A) = 0$.

Laskin TI-89:

➢ Yhtälöryhmä ratkaistaan komennolla **F2 Algebra: 1 Solve**. Esimerkin 10.16 yhtälöryhmä ratkaistaan seuraavasti: **solve(x+2y+2z=5 and 3x+5y+7z=1 and x+2y+z=2, {x, y, z})**.

Harjoitustehtäviä

Ratkaise seuraavat yhtälöryhmät

10.31 $$\begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ -x + 2y - z = -5 \\ 3x + 4y + z = 1 \end{cases}$$

10.32 $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+y-2z=1 \end{cases}$

10.33 $\begin{cases} 2x+4y-z=11 \\ 6x-y-3z=7 \\ -2x+6y+z=9 \end{cases}$

10.34 $\begin{cases} x+3y=3 \\ 2y-4z=11 \\ -z+u=6 \\ 4u-6x=5 \end{cases}$

10.35 $\begin{cases} x+y-2z+u=2 \\ -x+2y+z-3u=5 \\ 2x+5y-5z=11 \\ -x+5y-5u=12 \end{cases}$

10.36 $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y-2z=-2 \\ 3x+y-2z=-1 \\ 4x+3y-z=0 \end{cases}$

10.37 $\begin{cases} 2x-4y+5z=6 \\ -0{,}25x+y-1{,}25z=5 \end{cases}$

10.38 Ratkaise yhtälöryhmä käänteismatriisia käyttäen

a) $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 3x+7y=-2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+y+2z=8 \\ x+4y+2z=5 \\ 2x+2y+2z=7 \end{cases}$

10.39 Ratkaise Cramerin menetelmällä yhtälöryhmät

a) $\begin{cases} -2x+y=0 \\ 3x+4y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$

10.40 Osoita, että olivatpa α, r ja s mitä tahansa lukuja, niin yhtälöparilla

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha=r \\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha=s \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu (x, y).

10.41 Tutki, millä yhtälöryhmällä on ratkaisuna vektori, joka ei ole nollavektori ja määritä tämä vektori

a) $\begin{cases} 3x-4y=0 \\ -12x+16y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-3y=0 \\ 4x-2y=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 8x+7y+7z=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x-2y+4z=0 \\ 2x-3y+5z=0 \\ 3x+2y-7z=0 \end{cases}$

10.42 Määritä vakio a siten, että yhtälöryhmällä on ei-triviaali ratkaisu ja määritä ratkaisu.

a) $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ 2x-3y+2z=0 \\ 6x+y+az=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+y+az=0 \\ ax+5y+3z=0 \\ 2x+7y-6z=0 \end{cases}$

10.14 VEKTORIAVARUUS

10.14.1 Koordinaattiavaruus

Kappaleessa 10.2 todettiin, että tasovektori voidaan esittää 2×1-pystyvektorina ja avaruusvektori 3×1-pystyvektorina:

$$a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Yleistetään nyt nämä *n-ulotteiseksi vektoriksi.*

Koordinaattiavaruudella R^n tarkoitetaan kaikkien $n\times1$-pystyvektoreiden

$$\underline{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

joukkoa. Vektoriavaruuden R^n alkioita sanotaan ***n*-vektoreiksi** tai lyhyesti **vektoreiksi**. Reaaliluvut $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat vektorin $\underline{X}$ **koordinaatteja**. Vektorin $\underline{X}$ koordinaatteja merkitään yleisesti tällä tavalla. Vektoreiden yhtäsuuruus, summa ja luvulla kertominen määritellään kuten matriiseille[1]:

- **yhtäsuuruus**: $\underline{X}=\underline{Y} \Leftrightarrow x_i = y_i \quad \forall\, i=1,\ldots,n$.
- **summa**: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$

[1]Merkintä $\Leftrightarrow$ tarkoittaa yhtäpitävyyttä; merkintä $\forall$ luetaan "kaikilla"

- **luvulla kertominen**: $a\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}$

Vektori, jonka kaikki koordinaatit ovat nollia, on **nollavektori**: $\underline{\boldsymbol{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vektorin $\underline{X}$ **vastavektori** on vektori $-\underline{X} = (-1)\underline{X}$.

Vektoreiden laskutoimitukset seuraavat vastaavista matriisien laskutoimituksista:

Olkoot $\underline{X}$, $\underline{Y}$, $\underline{Z}$ n-vektoreita ja a, b skalaareja[2]. Tällöin on

1. $\underline{X} + \underline{Y} = \underline{Y} + \underline{X}$
2. $\underline{X} + (\underline{Y} + \underline{Z}) = (\underline{X} + \underline{Y}) + \underline{Z}$
3. $\underline{X} + \underline{\boldsymbol{0}} = \underline{X}$
4. $\underline{X} + (-\underline{X}) = \underline{\boldsymbol{0}}$
5. $a(b\underline{X}) = (ab)\underline{X}$
6. $(a+b)\underline{X} = a\underline{X} + b\underline{X}$
7. $a(\underline{X} + \underline{Y}) = a\underline{X} + a\underline{Y}$
8. $1\underline{X} = \underline{X}$

Esim. 10.18 $$2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 24 \end{pmatrix}$$

10.14.2 Lineaarikuvaus

Olkoon $\mathbf{R}^n$ ja $\mathbf{R}^m$ kaksi koordinaattiavaruutta. Funktiota $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ kutsutaan **lineaarikuvaukseksi**, jos jokaiselle vektorille $\underline{X}$, $\underline{Y} \in \mathbf{R}^n$ ja jokaiselle skalaarille a pätee

$$L(\underline{X} + \underline{Y}) = L(\underline{X}) + L(\underline{Y})$$

$$L(a\underline{X}) = aL(\underline{X})$$

[2]Vektorilaskennan yhteydessä tavallisia lukuja (reaalilukuja) sanotaan **skalaareiksi**.

Lineaarikuvauksella $L:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ on seuraavat ominaisuudet:

- $L(\underline{0}) = \underline{0}$
- $L(a_1\underline{X}_1 + a_2\underline{X}_2 + \cdots + a_k\underline{X}_k) = a_1L(\underline{X}_1) + a_2L(\underline{X}_2) + \cdots + a_kL(\underline{X}_k)$

Jos $\boldsymbol{A}$ on $m\times n$-matriisi, niin funktio

$$L:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m,\; L(\underline{X}) = A\underline{X}$$

on lineaarikuvaus, sillä

$$L(\underline{X}+\underline{Y}) = A(\underline{X}+\underline{Y}) = A\underline{X} + A\underline{Y} = L(\underline{X}) + L(\underline{Y})$$
$$L(a\underline{X}) = A(a\underline{X}) = aA\underline{X} = aL(\underline{X})$$

Näin ollen *jokaista $m\times n$-matriisia $\boldsymbol{A}$ vastaa lineaarikuvaus* $\mathbf{R}^n$*:stä* $\mathbf{R}^m$*:ään*. Myös käänteinen pätee: *jokaista lineaarikuvausta* $\mathbf{R}^n$:stä ja $\mathbf{R}^m$:ään *vastaa tietty $m\times n$-matriisi*.

Seuraava tulos selvittää *lineaarikuvausten yhdistetyn kuvauksen ja matriisitulon välisen yhteyden*:

Olkoon

- $k\times n$-matriisi $\boldsymbol{B}$ lineaarikuvauksen $M:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ matriisi.
- $m\times k$-matriisi $\boldsymbol{A}$ lineaarikuvauksen $L:\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^m$ matriisi.

Tällöin

- $m\times n$-matriisi $\boldsymbol{AB}$ on lineaarikuvauksen $L\circ M:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ matriisi.

Todistus: Olkoon $\underline{X}$ avaruuden $\mathbf{R}^n$ vektori. Tällöin

$$(L\circ M)(\underline{X}) = L(M(\underline{X})) = L(B\underline{X}) = A(\boldsymbol{B}\underline{X}) = (\boldsymbol{AB})\underline{X}.$$

Tästä esityksestä seuraa väite.

Esim. 10.19 Projektio $P\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $P\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on lineaarikuvaus, sillä aina

$$P\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_3 \end{pmatrix}\right\} = P\left\{\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = P\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right\} + P\left\{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right\}$$

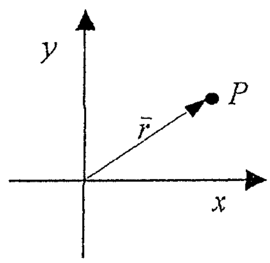
$$P\left\{a\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} = P\left\{\begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = aP\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\}$$

Lineaarikuvaus voidaan esittää matriisin avulla seuraavasti:

$$P\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

10.14.3 Tason kuvauksia

Paikkavektori



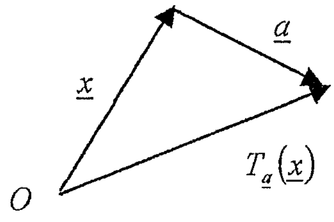
2-ulotteisessa avaruudessa vektoria, jonka alkupiste on origo ja loppupiste on P kutsutaan pisteen P **paikkavektoriksi**. Paikkavektorin avulla voidaan ilmaista avaruuden *pisteen sijainti origon suhteen*. Vektorilaskennassa on todettu, että pisteen $P(x,y)$ paikkavektorin $\bar{r}$ koordinaattiesitys yksikkövektoreiden $\bar{i}$ ja $\bar{j}$ suhteen on

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

eli *pisteen koordinaatit ovat samalla sen paikkavektorin koordinaatit.* Piste voidaan siten samaistaa paikkavektorinsa kanssa.

Koordinaattiavaruudessa $\mathbf{R}^n$ suoritetaan juuri tällainen samaistus: ***n*-vektoreita voidaan pitää myös avaruuden $\mathbf{R}^n$ pisteinä.**

Seuraavassa tarkastellaan kuvauksia $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Lähtöjoukon pistettä merkitään joko pisteen nimellä tai paikkavektorin avulla: $P = \underline{x}$. Vastaavaa kuvapistettä merkitään seuraavasti: $P' = \underline{x}'$.



Siirto

Siirto eli **translaatio** vektorin $\underline{a}$ verran on kuvaus

$T_{\underline{a}} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ T_{\underline{a}}(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{a}$.

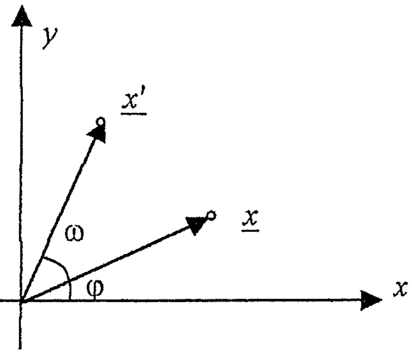
Kuvapiste P' saadaan siis siirtämällä pistettä P vektorin $\underline{a}$ verran. Siirto ei ole lineaarikuvaus! Totea tämä.

Kierto

Olkoon $K : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ **kierto**, jossa ainakin *origo kuvautuu itselleen.*

Tason kierron määrää kiertokulma ω. Olkoon pisteen P napakoordinaattiesitys

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$



Käyttäen sinin ja kosinin yhteenlaskukaavaa saadaan kuvapisteelle P' esitys

$$\underline{x}' = \left(\begin{bmatrix} r\cos(\varphi+\omega) \\ r\sin(\varphi+\omega) \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\omega - r\sin\varphi\sin\omega \\ r\sin\varphi\cos\omega + r\cos\varphi\sin\omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}\underline{x}$$

Tästä nähdään, että **tason kierto on lineaarikuvaus,** jonka **matriisiesitys** on

$$U = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}.$$

Esim. 10.20 Määritä matriisiesitys tason kierrolle origon ympäri, kun kierokulma ω = 120°.

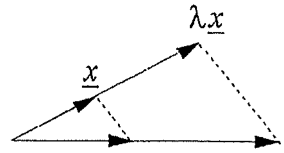
<u>Ratk.</u> Kysytty matriisiesitys on

$$U = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Skaalaus

Skaalaus eli **homotetia** *origon suhteen* määritellään seuraavasti:

$$S_\lambda : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ S_\lambda(\underline{x}) = \lambda\underline{x}$$



Koska

$$S_\lambda(\underline{x}) = \lambda\underline{x} = \lambda I\underline{x},$$

on **skaalaus** S_λ **lineaarikuvaus, jonka matriisiesitys on** λI.

Skaalauksessa on kyseessä mittakaavan muutos pitäen origoa kiintopisteenä.

Harjoitustehtäviä

10.43 Totea, että vektorin laskutoimitusominaisuudet 1–8 pätevät $\mathbf{R}^2$:ssa.

10.44 Olkoon

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \underline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Määritä $4\underline{u} - 3\underline{v}$

10.45 Olkoon $\underline{u}$ ja $\underline{v}$ kuten edellisessä tehtävässä. Ratkaise yhtälö

$$2\underline{u} + \underline{x} = 3\underline{v} - \underline{x}$$

10.46 Osoita, että kuvaus

$$L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix}$$

on lineaarikuvaus.

10.47 Määritä pisteiden $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ kuvat lineaarikuvauksessa

$$L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ L(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}.$$

10.48 Määritä tason neliön $1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2$ kuva lineaarikuvauksissa, joiden matriisit ovat

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

10.15 MATRIISIN OMINAISARVOT JA OMINAISVEKTORIT

Olkoon A $n\times n$-matriisi. Tarkastellaan yhtälöä

$A\underline{X} = \lambda\underline{X}$, (*)

missä $\underline{X}$ on n-pystyvektori ja λ skalaari.

Jos yhtälöllä (*) on ratkaisu $\underline{X} \neq \underline{0}$, niin λ on matriisin A **ominaisarvo** ja $\underline{X}$ on matriisin A **ominaisarvoon λ liittyvä ominaisvektori**.

Yhtälöryhmää (*) voidaan muokata seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
& A\underline{X} = \lambda\underline{X} \\
\Leftrightarrow\ & A\underline{X} = \lambda I\underline{X} \\
\Leftrightarrow\ & A\underline{X} - \lambda I\underline{X} = \underline{0} \\
\Leftrightarrow\ & (A - \lambda I)\underline{X} = \underline{0} \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Koska homogeenisella yhtälöryhmällä (**) on ei-triviaali ratkaisu $\underline{X} \neq \underline{0}$, jos ja vain jos $\det(A - \lambda I) = 0$ saadaan tulos

> Kertalukua $n\times n$ olevan matriisin $A = \left(A_{ij}\right)$ ominaisarvot ovat A:n **karakteristisen yhtälön**
>
> $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
>
> juuret. Ominaisarvoon λ_i liittyvä ominaisvektori $\underline{X}_i$ on homogeenisen yhtälöryhmän
>
> $(A - \lambda_i I)\underline{X} = \underline{0}$
>
> ei-triviaali ratkaisu.

$n\times n$-matriisin A **karakteristinen polynomi** $\det(A - \lambda I)$ on astetta n oleva polynomi. Koska ominaisarvot ovat tämän polynomin 0-kohtia, on matriisilla korkeintaan n eri ominaisarvoa.

Ominaisarvot voivat olla myös imaginaarilukuja.

Voidaan osoittaa, jos matriisi on *symmetrinen*, niin

- ominaisarvot ovat reaaliset.
- eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan[3].

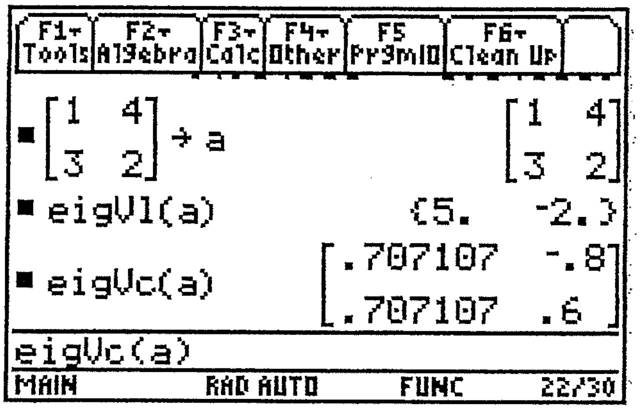
[3] Ominaisvektoreiden välinen skalaaritulo on nolla.

Laskin TI-89:

- Matriisia A ominaisarvot lasketaan komennolla **eigVl(**A**)**. Komento tulostaa ominaisarvot listana.
- Matriisin A ominaisvektorit lasketaan komennolla **eigVc(**A**)**. Komento tulostaa ominaisvektorit neliömatriisina, jossa i:s sarake on ominaisarvolistan i:nteen alkioon liittyvä ominaisvektori. Ominaisvektorit on normeerattu siten, että niiden normi on yksi.

Esim. 10.21 Oheisessa kuvassa on esitetty, kuinka laskimella TI-89 lasketaan matriisin $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit:

Ominaisarvot on 5 ja –2. Ominaisarvoon 5 liittyvä ominaisvektori on $\begin{bmatrix} 0{,}707107 \\ 0{,}707017 \end{bmatrix}$ ja ominaisarvoon –2 liittyvä ominaisvektori on $\begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$.



Harjoitustehtäviä

10.49 Onko $\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ matriisin $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ominaisvektori?

10.50 Tutki ovatko pystyvektorit $\underline{X}_1$, $\underline{X}_2$ ja $\underline{X}_3$ matriisin A ominaisvektoreita ja jos ovat, niin mihin ominaisarvoihin liittyviä, kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{X}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ja } \underline{X}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10.51 Määrää yksikkömatriisin $\boldsymbol{I}$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

10.52 Määrää lävistäjämatriisin $\lceil \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \rfloor$ ominaisarvot ja ominaisvektorit.

10.53 Todista: Jos $\underline{X}$ on matriisin A ominaisvektori niin $t\underline{X}$ on matriisin A ominaisvektori, kun $t \neq 0$.

10.54 Todista: $\det(A) = 0$ jos ja vain jos nolla on A:n ominaisarvo.

10.55 Todista: Jos λ on ei-singulaarisen matriisin A ominaisarvo, niin $\frac{1}{\lambda}$ on A^{-1}:n ominaisarvo.

10.56 Määritä seuraavien matriisien ominaisarvot ja ominaisvektorit

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

10.57 Olkoon $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Määritä A:n ominaisarvot ja ominaisvektorit

10.58 Osoita, että symmetrisen matriisin ominaisarvot ovat reaaliset.

Kirjat ja monisteet edullisesti ja nopeasti

ISBN 951-9004-83-1

9 789519 004839