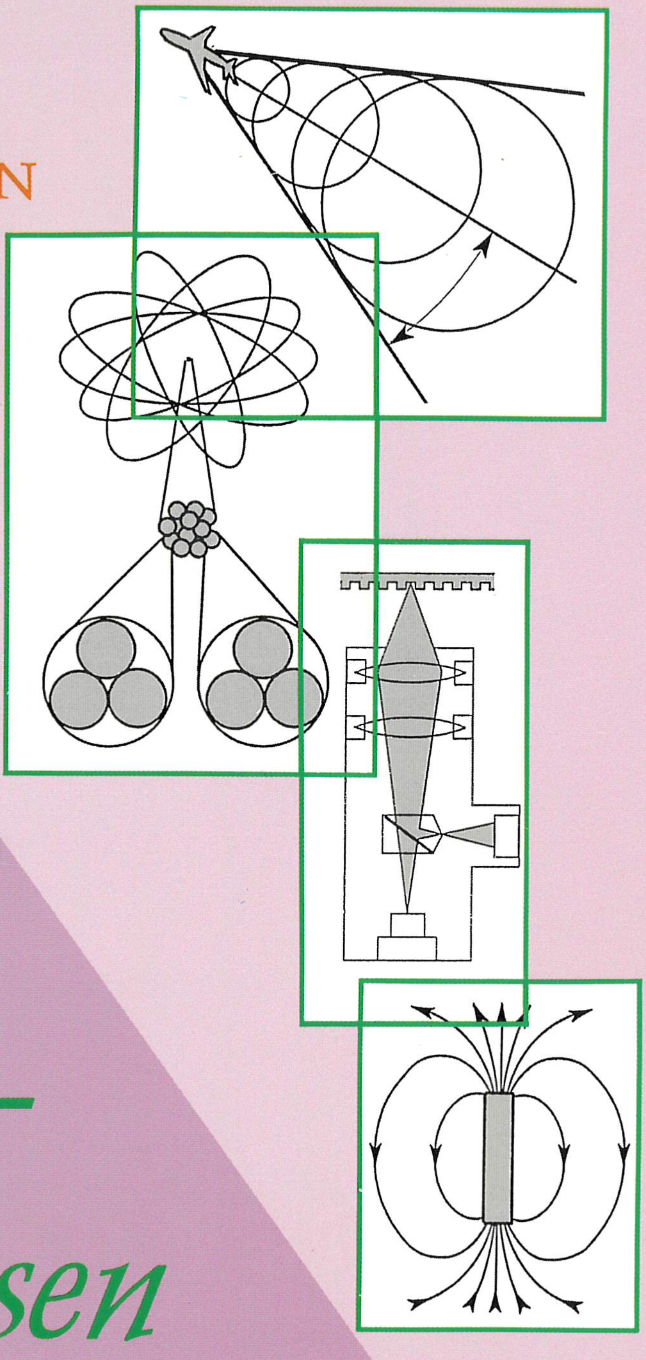
MIKKO MÄKELÄ
RIITTA MÄKELÄ
OLAVI SILTANEN



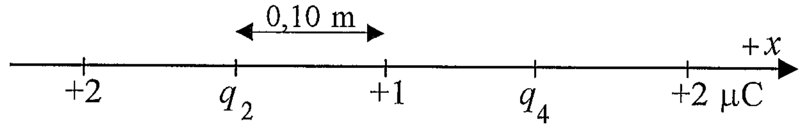
2

Insinöörikoulutuksen FYSIIKKA

Tammertekniikka

PARILLISTEN TEHTÄVIEN RATKAISUT

Luku 14



14.2. Oletetaan $q_2 > 0$, $q_4 > 0$

Muodostetaan ensin keskimmäiseen varaukseen vaikuttava voima

$$F_3 = \frac{-(2\cdot1)\cdot10^{-12}\,\mathrm{C}^2}{4\pi\varepsilon\cdot0{,}2^2\,\mathrm{m}^2} - \frac{q_2\cdot10^{-6}\,\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon\cdot0{,}1^2\,\mathrm{m}^2} + \frac{q_4\cdot10^{-6}\,\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon\cdot0{,}1^2\,\mathrm{m}^2} + \frac{(2\cdot1)\cdot10^{-12}\,\mathrm{C}^2}{4\pi\varepsilon\cdot0{,}2^2\,\mathrm{m}^2} = 0$$

$\Rightarrow q_2 = q_4$ Toiseen varaukseen vaikuttava voima on

$$F_2 = \frac{-2\mu\mathrm{C}\,q_2}{0{,}1^2\,\mathrm{m}^2} + \frac{1\mu\mathrm{C}\,q_2}{0{,}1^2\,\mathrm{m}^2} + \frac{q_2\,q_4}{0{,}2^2\,\mathrm{m}^2} + \frac{2\mu\mathrm{C}\,q_2}{0{,}3^2\,\mathrm{m}^2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{q_2 = 3{,}1\mu\mathrm{C} \text{ ja } q_4 = 3{,}1\mu\mathrm{C} \text{ tai } q_2 = q_4 = 0.}}$$

14.4. **a)** $F = \dfrac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{42\cdot10^{-9}\,\mathrm{C}\cdot(-120\cdot10^{-9}\,\mathrm{C})}{4\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}\cdot(0{,}10\mathrm{m})^2} = -4{,}53\mathrm{mN} = \underline{\underline{-4{,}5\mathrm{mN}}}.$ Vetovoima

b) Kosketuksessa varausten summa jakautuu tasan kummallekin pallolle

$Q_1 = Q_2 = (-120+42)\cdot10^{-9}\,\mathrm{C}/2 = -39\mathrm{nC}$

$\Rightarrow F = \underline{\underline{1{,}4\mathrm{mN}}}.$ Työntövoima

---

14.6. Sähkökentän voima ylöspäin = painovoima alaspäin eli $neE = mg$

$$\Rightarrow n = \frac{mg}{eE} = \frac{10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1{,}6\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot5{,}6\cdot10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}} = \underline{\underline{11\cdot10^{12}}}$$

14.8. $$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} = \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot3\cdot10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}}{9{,}1\cdot10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 52{,}7\cdot10^{15}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \underline{\underline{5{,}4\cdot10^{15}\,g.}}$$

14.10. Elektronin rata levyjen välissä on ”heittoliikettä”, jossa

$v_{0y} = v_0\cos70° = 8{,}89\cdot10^6\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ja $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{eE}{m}$

Silloin y-nopeus on $v_y = v_{0y} - at$; ylhäällä $v_y = 0 \Rightarrow$

Sitä vastaava ajanhetki on $0 = v_{0y} - at \Rightarrow t = \dfrac{v_{0y}}{a} = \dfrac{v_{0y}m}{eE}$.

Nyt saadaan ”korkeudet” (= etäisyydet levyistä)

$$\Rightarrow y' = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}at^2 = v_{0y}\frac{v_{0y}m}{eE} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{eE}{m}\cdot\left(\frac{v_{0y}m}{eE}\right)^2$$

$$y' = \tfrac{1}{2}\frac{v_{0y}^2 m}{eE} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(8{,}89\cdot10^6\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2\cdot 9{,}1\cdot10^{-31}\text{kg}}{1{,}6\cdot10^{-19}\text{C}\cdot 2{,}4\cdot10^4\,\frac{\text{N}}{\text{C}}} = 0.370\cdot10^{-3}\text{m}$$

$$\Rightarrow y = 10^{-2}\text{m} - y' = \underline{\underline{0{,}63\text{mm}}}.$$

Ratkaisu energiaperiaatetta soveltaen.

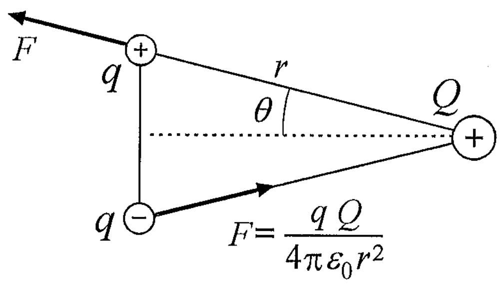
y-suunnan liike-energia = sähkökentän työ eli $\tfrac{1}{2}mv_{0y}^2 = F\,y' = e\,E\,y' \Rightarrow y' =$ jne.

14.12. Sähkökentän tekemä työ kuluu hiukkasten liike-energian suurentamiseen

$$Fs = E_\text{k} \Rightarrow s = \frac{E_\text{k}}{F} = \frac{E_\text{k}}{eE} = \frac{5\cdot10^2\,\text{eV}}{e\cdot5\cdot10^4\,\frac{\text{N}}{\text{C}}} = 10\cdot10^{-3}\,\text{m} = \underline{\underline{1{,}0\,\text{cm}}}.$$

$$s = \tfrac{1}{2}at_e^2 \Rightarrow t_e = \sqrt{\frac{2s}{a_e}} = \sqrt{\frac{2sm_e}{eE}} = \sqrt{\frac{2\cdot10^{-2}\,\text{m}\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\,\text{kg}}{1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{C}\cdot5\cdot10^4\,\frac{\text{N}}{\text{C}}}} = \underline{\underline{1{,}5\text{ns}}}. \qquad t_\text{p} = \underline{\underline{65\text{ns}}}.$$

14.14. Dipolin + -napaan vaikuttaa poistovoima ja – -napaan vetovoima. Niiden x-suuntaisten komponenttien summa on nolla ja y-komponenteille sekä momentille saadaan



$$\sum F_y = 2\cdot\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta = \underline{\underline{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta}}$$

$$\sum M = 2\cdot\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta\cdot r\cos\theta = \underline{\underline{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 r}\sin\theta\cos\theta}}$$

14.16. a) Vuo tahkojen läpi $\psi_1 = \dfrac{4{,}2\,\mu\text{C}}{6} = 0{,}70\,\mu\text{C}$

Vuo koko kuution läpi $\psi = 4{,}2\,\mu\text{C}$.

b) Vuo y-akselia vastaan kohtisuorassa olevien tahkojen läpi

$$\psi = \varepsilon EA = \varepsilon\cdot5{,}6\cdot10^4\,\frac{\text{N}}{\text{C}}\cdot25\cdot10^{-4}\,\text{m}^2 = \underline{\underline{1{,}2\text{nC}}}.$$

Muiden neljän tahkon läpi $\Psi = 0$.

14.18. Kuvitellaan pieni kuutio, jonka leikkaa pinnasta alueen A. Vuoviivat kulkevat silloin sisältä ulos kohtisuorasti kuution yhden sivutahkon läpi. Silloin (14-7):n mukaan

$$\psi = \varepsilon EA = Q = \sigma A \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

14.20. Varaus siirtyy sähkökentässä. Kentän tekemä työ

$$W = Fs\cos\theta = EQ_1 s\cos\theta = \frac{U}{d}Q_1 s\cos\theta = \frac{Qd}{\varepsilon_0 Ad}Q_1 s\cos\theta = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}Q_1 s\cos\theta$$

$$= \frac{8\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}\cdot 2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}\cdot 5\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\cdot\cos 0°}{8{,}85\cdot 10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}\cdot 120\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 7{,}5\,\mathrm{mJ}$$

e) $U = \dfrac{W}{Q_1} = \dfrac{7{,}53\cdot 10^{-3}\,\mathrm{J}}{2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}} = 3{,}8\,\mathrm{kV}$

	θ/°	W/mJ	e) U/kV
A	0	7,5	3,8
B	180	–7,5	–3,8
C	90	0	0
D	25	6,8	3,4

— — — — — — — — — — —

14.22. a) $F = Ee = \dfrac{U}{d}e = \dfrac{12\mathrm{V}}{2\mathrm{m}}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} = 960\cdot 10^{-21}\,\mathrm{N}$

b) $W = UQ = 12\,\mathrm{V}\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} = \underline{\underline{1{,}9\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}}}$

— — — — — — — — — — —

14.24. a) Energiaperiaate $Ue = ½mv^2 \Rightarrow$

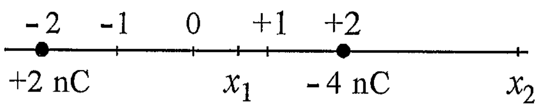
$$U = \frac{mv^2}{2e} = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot(1{,}0\cdot 10^{7}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = 284{,}4\,\mathrm{V} = \underline{\underline{280\,\mathrm{V}}}$$

b) Energiaperiaate antaa nyt $½mv_2^2 = U_1 e + U_2 e = (U_1 + U_2)e$

$$\Rightarrow v_2^2 = \frac{(U_1+U_2)e\cdot 2}{m} = \frac{584{,}4\,\mathrm{V}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}\cdot 2}{9{,}1\cdot 10^{-19}\,\mathrm{kg}} \Rightarrow v = \underline{\underline{14\cdot 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}$$

— — — — — — — — — — —

14.26. x-akselilla:



$$V_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{2\cdot 10^{-2}+x} - \frac{Q_2}{2\cdot 10^{-2}-x}\right)$$

$$-1{,}0\cdot 10^{3} = \frac{1}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\frac{2\cdot 10^{-9}}{2\cdot 10^{-2}+x} - \frac{4\cdot 10^{-9}}{2\cdot 10^{-2}-x}\right) \Rightarrow x = \underline{\underline{0{,}73\,\mathrm{mm}}}$$

Toinen piste $-1{,}0\cdot 10^{3} = \dfrac{1}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\dfrac{2\cdot 10^{-9}}{2\cdot 10^{-2}+x} - \dfrac{4\cdot 10^{-9}}{2\cdot 10^{-2}+x}\right) \Rightarrow x = \underline{\underline{4{,}85\,\mathrm{cm}}}$

y-akselilla: $-1{,}0\cdot 10^{3} = \dfrac{1}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\left(\dfrac{2\cdot 10^{-9}}{\sqrt{2^2+y^2}} - \dfrac{4\cdot 10^{-9}}{\sqrt{2^2+y^2}}\right) \Rightarrow$ ei ratkaisua.

— — — — — — — — — — —

14.28. a) Pallon sisällä $E = 0$ ja potentiaali on sama kuin pallon kuorella.

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{12\cdot10^{-9}\,\mathrm{C}}{4\cdot\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}\cdot4{,}2\cdot10^{-2}\,\mathrm{m}} = 2{,}57\cdot10^3\ \mathrm{V} = \underline{\underline{2{,}6\,\mathrm{kV}}}$$

b)

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{12\cdot10^{-9}\mathrm{C}}{4\cdot\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}\cdot(5\cdot10^{-2}\mathrm{m})^2} = 43{,}2\cdot10^3\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \underline{\underline{43\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}}}}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 2{,}16\cdot10^3\ \mathrm{V} = \underline{\underline{2{,}2\,\mathrm{kV}}}$$

14.30. $I = \frac{Q}{t} = 2{,}0\cdot10^{-3}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$ ja $P = UI = 2{,}0\cdot10^6\,\mathrm{V}\cdot2{,}0\cdot10^{-3}\,\mathrm{A} = \underline{\underline{4{,}0\,\mathrm{kW}}}$

14.32. Varaukset siirtyvät siten, että potentiaalit pinnoilla ovat yhtä suuret.

$$\frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_0\cdot5\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}} = \frac{6{,}0\cdot10^{-9}\,\mathrm{C}-\mathrm{Q}_1'}{4\pi\varepsilon_0\cdot8\cdot10^{-2}\,\mathrm{m}} \Rightarrow \underline{\underline{Q_1' = 2{,}3\,\mathrm{nC}\ \text{ja}\ Q_2' = 3{,}7\,\mathrm{nC}}}$$

14.34. $U_{\mathrm{AB}} = E_{\max}(\ln\frac{r_{\mathrm{B}}}{r_{\mathrm{A}}})r_{\mathrm{A}} = \underline{\underline{4{,}5\mathrm{kV}}}$ Ilman $E_{\max} = 3\cdot10^6$ V/m

---

14.36. $Q = C_0U_0 = C_1U_1$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{C_0}{C_1}U_0 = \frac{\varepsilon A(d-h)}{d\varepsilon A}\cdot U_0 = \frac{d-h}{d}\cdot U_0 = \underline{\underline{U_0(1-\frac{h}{d})}}$$

14.38. a) $\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{C_1U_1}{A} = \frac{C_2U_2}{A} \Rightarrow C_1U_1 = C_2U_2 \Rightarrow \frac{\varepsilon_0 A}{d}U_1 = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 A}{d}U_2 \Rightarrow U_1 = \varepsilon_r U_2$

$$\Rightarrow \varepsilon_r = \frac{U_1}{U_2} = \frac{1200\ \mathrm{V}}{400\ \mathrm{V}} = 3{,}0$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{C_2U_2}{A} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 AU_2}{dA} = 2{,}655\cdot10^{-6}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{m}^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\mathrm{p}} = (1-\frac{1}{\varepsilon_r})\sigma = \underline{\underline{1{,}8\cdot10^{-6}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{m}^2}}}$$

b) $$Q = \sigma A = nAde \text{ ja } p = ed = \frac{\sigma A}{nA} = \frac{1{,}77\cdot10^{-6}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}}{5\cdot10^{28}\,\frac{1}{\mathrm{m}^3}} = \underline{\underline{3{,}54\cdot10^{-35}\,\mathrm{Cm}}}$$

14.40. a) $Q = C_1U_1 = C_2U_2 \Rightarrow U_2 = \frac{C_1}{C_2}U_1 = \frac{950\text{pF}}{50\text{pF}} \cdot 400\,\text{V} = \underline{\underline{7{,}6\text{kV}}}$

b) $W = \frac{1}{2}C_2U_2^2 - \frac{1}{2}C_1U_1^2 = \underline{\underline{1{,}4\,\text{mJ}}}$

14.42. a) $C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln(\frac{r_2}{r_1})} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \cdot 1\text{m}}{\ln(\frac{5\,\text{mm}}{1\,\text{mm}})} = \underline{\underline{170\,\text{pF}}}$

b) $U = E_{\text{max}} \ln\frac{r_2}{r_1} = \underline{\underline{8{,}0\,\text{kV}}}$

14.44. $C = 2\mu\text{F} + (\frac{1}{2\,\mu\text{F}} + \frac{1}{2\,\mu\text{F}})^{-1} = \underline{\underline{3{,}0\,\mu\text{F}}}$

14.46. a) $C = (\frac{1}{2\mu\text{F}} + \frac{1}{3\mu\text{F}})^{-1} + (\frac{1}{3\mu\text{F}} + \frac{1}{6\mu\text{F}})^{-1} = \underline{\underline{3{,}2\mu\text{F}}}$

b) Jännite ($U = \frac{Q}{C}$) ylittyy ensin kapasitanssiltaan pienimmässä kondensaattorissa (2 μF). Oletetaan sen jännitteeksi 400 V. Silloin sen varaus on

$$Q_1 = C_1U_1 = 2\,\mu\text{F} \cdot 400\,\text{V} = 800\,\mu\text{C}.$$

Kuvan 14-39 vasemmassa haarassa myös 3 μF kondensaattorin varaus on 800 μC. Tällöin sen jännite on $U_3 = \frac{800\,\mu\text{C}}{3\,\mu\text{F}} = 267\,\text{V} \Rightarrow U_{\text{max}} = 400\,\text{V} + 267\,\text{V} = \underline{\underline{670\ \text{V}}}$.

Luku 15

15.2. $Q = It = 10^{-6}\,\text{A} \cdot 1\text{s} = 10^{-6}\,\text{C} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{Q}{e} = 6{,}25 \cdot 10^{12} = \underline{\underline{6{,}3 \cdot 10^{12}}}$

15.4. a) $R = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} \Rightarrow I_2 = \frac{I_1U_2}{U_1} = \frac{2{,}04\,\text{A} \cdot 20\,\text{V}}{10{,}2\,\text{V}} = \underline{\underline{4{,}00\text{A}}}$

b) $\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} \Rightarrow U_2 = \frac{U_1I_2}{I_1} = \frac{10{,}2\,\text{V} \cdot 0{,}100\,\text{A}}{2{,}04\,\text{A}} = \underline{\underline{0{,}500\,\text{V}}}$

c) $R = \frac{U_1}{I_1} = \frac{10{,}2\,\text{V}}{2{,}04\,\text{A}} = \underline{\underline{5{,}00\,\Omega}}$

15.6. a) $R = \frac{\rho l}{A} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{0{,}12\Omega \cdot \pi \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-3}\text{m})^2}{17{,}2 \cdot 10^{-9}\,\Omega\text{m} \cdot 4} = 1{,}37\,\text{m} = \underline{\underline{1{,}4\,\text{m}}}$

b) $l_2 = 0{,}24$ m
c) $l_3 = 48$ mm

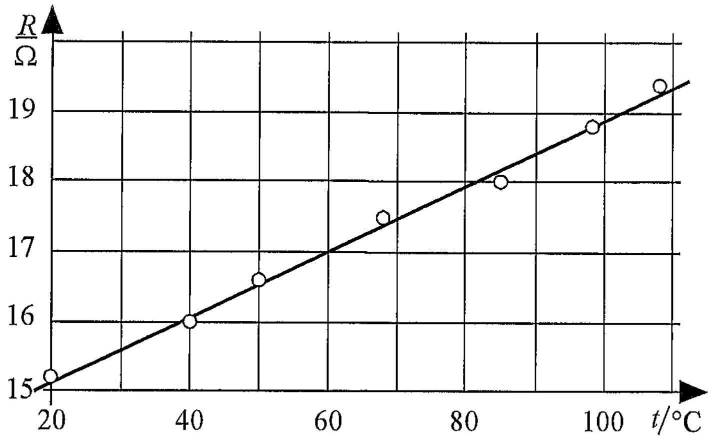
15.8. Kuvaaja näyttäisi olevan suora, jonka kulmakerroin on

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{3{,}8\,\Omega}{80\,°\text{C}}$$

$$\Delta R = R_0 \alpha \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\Delta R}{\Delta t} \cdot \frac{1}{R_0}$$

$$= \frac{3{,}8\,\Omega}{80\,°\text{C}} \cdot \frac{1}{16{,}5\,\Omega} = \underline{\underline{2{,}8 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{°\text{C}}}}$$

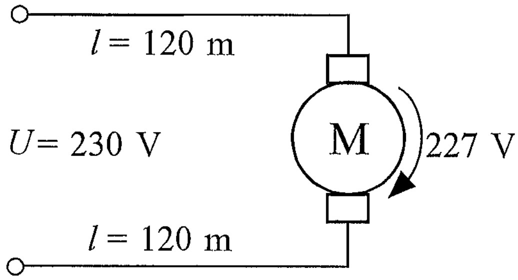


15.10. a) Johtimien osalla jännitehäviö on $U_\text{J} = 230\,\text{V} - 227\,\text{V} = 3{,}0\,\text{V}$

$\Rightarrow$ Johtimen tehohäviö on $P_\text{J} = \dfrac{U_\text{J}^2}{R} = \dfrac{U_\text{J}^2 A}{\rho \cdot 2l}$

$$= \frac{3^2\,\text{V}^2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2}{17{,}2 \cdot 10^{-9}\,\Omega\text{m} \cdot 2 \cdot 120\,\text{m}} = \underline{\underline{3{,}3\,\text{W}}}$$

b) $P = UI = U \cdot \dfrac{P_\text{J}}{U_\text{J}} = 230\,\text{V} \cdot \dfrac{3{,}27\,\text{W}}{3\text{V}} = \underline{\underline{250\,\text{W}}}.$



15.12. a) Lämmittimen resistanssi $R = \dfrac{U^2}{P} = \dfrac{12\,\text{V}^2}{20\text{W}} = 7{,}2\Omega$

Kun kuumentimen teho on 10 W, sen jännite on U_2

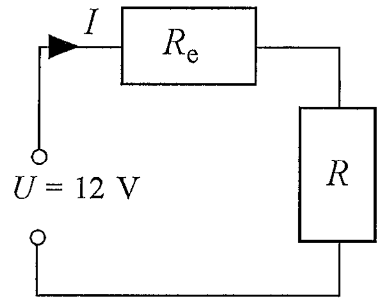
$$P_2 = \frac{U_2^2}{R} \Rightarrow U_2 = \sqrt{P_2 R} = \sqrt{10\,\text{W} \cdot 7{,}2\Omega} = 8{,}49\,\text{V}$$

$\Rightarrow$ Etuvastuksen jännite on $U_e = 12\,\text{V} - 8{,}49\text{V} = 3{,}51\text{V}$

$\Rightarrow$ Etuvastuksen resistanssi on

$$R_e = \frac{U_e}{I} = \frac{U_e}{U_2 / R} = \frac{U_e \cdot R}{U_2} = \frac{3{,}51\,\text{V} \cdot 7{,}2\Omega}{8{,}49\,\text{V}} = 2{,}98\Omega = \underline{\underline{3{,}0\Omega}}$$

b) Koko kytkennän teho $P = UI = U \cdot \dfrac{U_2}{R} = 12\,\text{V} \cdot \dfrac{8{,}49\text{A}}{7{,}2\Omega} = \underline{\underline{14\,\text{W}}}$

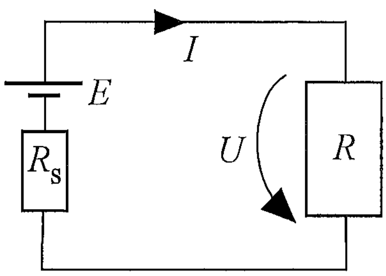


15.14. Virta $I = \dfrac{E}{R + R_\text{s}}$. Kuorman teho $P = I^2 R = \dfrac{E^2 R}{(R + R_\text{s})^2}$

Tehon ääriarvokohta löytyy derivaatan avulla:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \frac{E^2 (R + R_\text{s})^2 - 2(R + R_\text{s}) E^2 R}{(R + R_s)^4} = 0$$

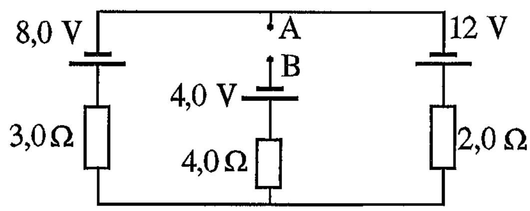
$R + R_\text{s} - 2R = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R = R_\text{s}}}$



15.16. Kaikkien lähteiden sisäinen resistanssi $R_s = 1{,}0\ \Omega$.
Kierretään ulkokehä soveltaen Kirchhoffin II lakia

$$12\ \mathrm{V} - I \cdot 7\Omega - 8\ \mathrm{V} = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{7}\ \mathrm{A} = 0{,}571\ \mathrm{A}$$



Pisteiden A ja B välinen jännite saadaan, kun kierretään A:sta vasenta kautta B:hen ja ynnätään potentiaalien muutokset

$$U_{BA} = +8\mathrm{V} + I \cdot 4\Omega - 4\ \mathrm{V} = \underline{\underline{6{,}3\ \mathrm{V}}}; \quad V_A < V_B$$

Napajännitteet ovat $8\ \mathrm{V} + I \cdot 1\Omega = 8{,}6\mathrm{V};\ 4\mathrm{V} - 0 \cdot 1\Omega = 4\ \mathrm{V}$ ja $12\ \mathrm{V} - I \cdot 1\Omega = 11{,}4\ \mathrm{V}$

15.18. Keskimmäisessä haarassa ei kulje virtaa, jos $U_{BA} = 8\ \mathrm{V}$ = keskimmäisen lähteen sähkömotorinen voima.
Annetun ehdon mukaan $I_1 = I_2 = I$

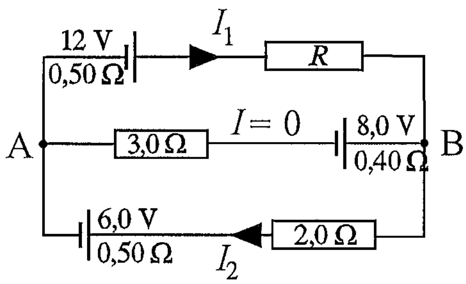
Kirchhoffin jännitelakia soveltaen saadaan

$$\begin{cases} -I \cdot 0{,}50\Omega + 12\ \mathrm{V} - IR = 8\ \mathrm{V} & (1) \\ 6\ \mathrm{V} - I \cdot 2{,}5\Omega = 8\ \mathrm{V} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow I = \frac{2\ \mathrm{V}}{2{,}5\Omega} = 0{,}8\ \mathrm{A}$$

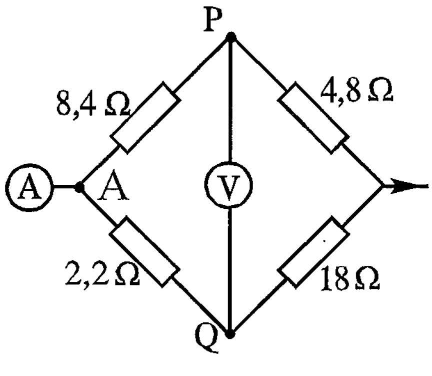
$$(1) \Rightarrow -0{,}8\ \mathrm{A} \cdot 0{,}50\Omega + 12\ \mathrm{V} - 0{,}8\ \mathrm{A} \cdot R = 0$$

$$\Rightarrow R = \underline{\underline{4{,}5\ \Omega}}.$$



15.20. Ylemmän ja alemman haaran potentiaalimuutosten on oltava yhtä suuret (a).
Virtojen summan on oltava annettu 7 A (b).

$$\begin{cases} (8{,}4\Omega + 4{,}8\Omega)I_1 = (2{,}2\Omega + 18\Omega)I_2 & (a) \\ I_1 + I_2 = 7\ \mathrm{A} & (b) \end{cases}$$



Ratkaistaan virrat ja haarojen potentiaalimuutokset

$$I_1 = 4{,}2335\ \mathrm{A} \text{ ja } I_2 = 2{,}7665\mathrm{A}$$

$$\Rightarrow U_{AP} = 4{,}2335\ \mathrm{A} \cdot 8{,}4\Omega = 35{,}56\ \mathrm{V}$$

$$\Rightarrow U_{AQ} = 2{,}7665\ \mathrm{A} \cdot 2{,}2\Omega = 6{,}086\ \mathrm{V}$$

Olettaen, että potentiaali pisteessä A on 100 V, saadaan jännitteeksi

$$U_{PQ} = (100 - 35{,}56)\ \mathrm{V} - (100 - 6{,}086)\ \mathrm{V}$$

$$= -29{,}47\ \mathrm{V} = \underline{\underline{-29\ \mathrm{V}}} \quad (V_P < V_Q)$$

15.22. Puretaan piiri osa kerrallaan ylemmästä haarasta lähtien

$$\left(\frac{1}{5\,\Omega}+\frac{1}{3\,\Omega+4\,\Omega}\right)^{-1}=2{,}917\,\Omega \quad \text{edelleen} \quad 4\,\Omega+2{,}917\,\Omega=6{,}917\,\Omega$$

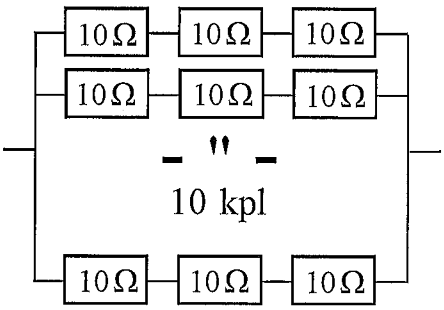
$$R=\left(\frac{1}{2\,\Omega}+\frac{1}{6{,}917\,\Omega}\right)^{-1}=1{,}55\,\Omega=\underline{\underline{1{,}6\,\Omega}}.$$

15.24. 1) 30 vastusta siten, että 3 vastusta on sarjassa $3 \cdot R = 30\ \Omega$ ja näitä on 10 rinnakkain, kokonaisresistanssi

$$R=\left(10\cdot\frac{1}{30\,\Omega}\right)^{-1}=3{,}0\,\Omega$$

Kaikkien vastusten tehot ovat yhtä suuret ja
Kokonaisteho on <u>30 W</u>.

1)



2) 6 vastusta siten, että 3 on sarjassa ja niiden rinnalle on kytketty 3 yksittäistä vastusta

$$R=\left(\frac{1}{30\,\Omega}+3\cdot\frac{1}{10\,\Omega}\right)^{-1}=3{,}0\,\Omega$$

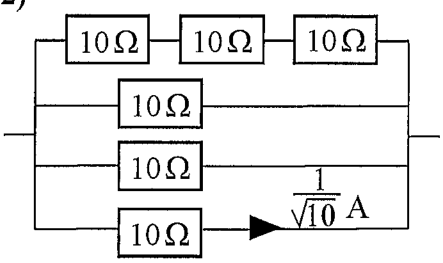
Yhden resistanssin maksimivirta on $I_{max}=\frac{1}{\sqrt{10}}\,\text{A}$.

Silloin kokonaisvirta ja teho ovat

$$I=3\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\,\text{A}+\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{10}}\,\text{A}=\frac{10}{3}\frac{1}{\sqrt{10}}\,\text{A}=\frac{\sqrt{10}}{3}\,\text{A}$$

$$\Rightarrow P=3\,\Omega\cdot\frac{10}{9}\,\text{A}^2=3\frac{1}{3}\,\text{W}=\underline{\underline{3{,}3\,\text{W}}}$$

2)



15.26. Annettu $R_V=10{,}0\cdot10^{3}\,\Omega$ ja $R_A=50\,\Omega$

Lasketaan ensin volttimittarin läpi kulkeva virta ja sitten ampeerimittarissa tapahtuva jännitehäviö

$$I_2=\frac{U}{R_V}=\frac{142\,\text{V}}{10{,}0\cdot10^{3}\,\Omega}=14{,}2\cdot10^{-3}\,\text{A}$$

$$U_A=I_1R_A=0{,}255\,\text{A}\cdot50\,\Omega=12{,}75\,\text{V}$$

Nyt saadaan resistanssin jännitehäviö ja edelleen resistanssi

$$U_R=142\,\text{V}-12{,}75\,\text{V}=129{,}25\,\text{V} \quad\Rightarrow\quad R=\frac{U_R}{I_1}=\frac{129{,}25\,\text{V}}{0{,}255\,\text{A}}=506{,}86\,\Omega=\underline{\underline{507\,\Omega}}.$$

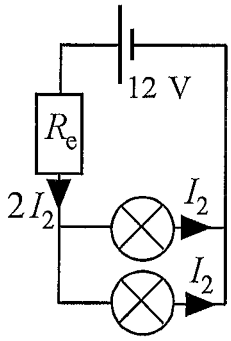
15.28. Jännitehäviö galvanometrissä $U_G=I_GR_G=0{,}50\cdot10^{-3}\,\text{A}\cdot1{,}0\cdot10^{3}\,\Omega=0{,}50\,\text{V}$.
Vastuksen R_1 jännitehäviö $U_{R1}=1{,}0\,\text{V}-0{,}50=0{,}50\,\text{V}$. Yhtä suuri virta kulkee kaikkien komponenttien läpi, joten $R_1=\frac{U_{R1}}{I}=\frac{0{,}50\,\text{V}}{0{,}50\cdot10^{-3}\,\text{A}}=\underline{\underline{1{,}0\,\text{k}\Omega}}.$

Muiden resistanssien arvot saadaan vastaavasti.

$$R_2=\frac{U_{R2}}{I}=\frac{10\,\text{V}-1\text{V}}{0{,}50\cdot10^{-3}\,\text{A}}=\underline{\underline{18\,\text{k}\Omega}}. \qquad R_3=\frac{U_{R3}}{I}=\frac{100\,\text{V}-11\text{V}}{0{,}50\cdot10^{-3}\,\text{A}}=\underline{\underline{180\,\text{k}\Omega}}.$$

15.30. Yhden lampun resistanssi jännitteellä 12V on

$$R_1 = \frac{U_1^2}{P_1} = \frac{12^2\,\mathrm{V}^2}{45\,\mathrm{W}} = 3{,}2\,\Omega.$$



Annetun lineaarisuustiedon perusteella jännitteellä 8 V

$$R_2 = \frac{3{,}2\,\Omega}{1{,}25} = 2{,}56\,\Omega.$$

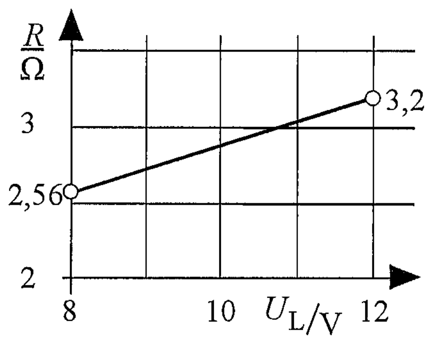
Etuvastuksessa jännitteen alenema on $U_e = 12\,\mathrm{V} - 8\mathrm{V} = 4{,}0\,\mathrm{V}$

a) Yhdessä lampussa kulkeva "normaalinen" virta

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{8\,\mathrm{V}}{2{,}56\,\Omega} = 3{,}125\,\mathrm{A}.$$

Etuvastuksessa on $I_e = 2I_2 = 6{,}25\,\mathrm{A} \Rightarrow R_e = \frac{U_e}{I_e} = \frac{4{,}0\,\mathrm{V}}{6{,}25\,\mathrm{A}} = \underline{\underline{0{,}64\,\Omega}}.$

b) Välillä 8...12 V saadaan yhden lampun resistanssille yhtälö



$$(R_L - 3{,}2\,\Omega) = \frac{(3{,}2-2{,}56)\Omega}{12\,\mathrm{V}-8\,\mathrm{V}}\cdot(U_L - 12\,\mathrm{V})$$

$$\Rightarrow R_L = 0{,}160\frac{\Omega}{\mathrm{V}}\cdot U_L + 1{,}28\,\Omega \quad (1)$$

Kun toinen lamppu on palanut saadaan virralle ja lampun jännitteelle yhtälöt

$$I = \frac{12\,\mathrm{V}}{0{,}64\,\Omega + R_L} \quad (2) \qquad U_L = IR_L \quad (3)$$

Näistä kolmesta yhtälöstä ratkaistaan

$$R_L = 2{,}848\,\Omega = 2{,}8\,\Omega$$

$$U_L = 9{,}798\,\mathrm{V} = \underline{\underline{9{,}8\,\mathrm{V}}}$$

$$I = 3{,}441\mathrm{A} = 3{,}4\mathrm{A}$$

15.32. $U = U_0 e^{-t/RC}$

$C = 8{,}0\,\mu\mathrm{F}$
$R = 2{,}0\,\mathrm{M}\Omega$

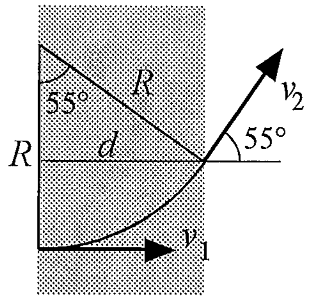
$$\frac{U_0}{2} = U_0 e^{-t/RC}$$

$$-\ln 2 = -\frac{t}{RC} \Rightarrow t = \ln 2\cdot RC = 11{,}09\,\mathrm{s} = \underline{\underline{11\mathrm{s}}}.$$

Seuraavien 11 s aikana jännite putoaa puoleen eli neljäsosaan alkuperäisestä arvosta.
$t = \ln 4\cdot RC = 22\,\mathrm{s}$.

Luku 16

16.2. Kulkusuunnan muutoksesta saadaan säde



$$\frac{d}{R} = \sin 55° \Rightarrow R = \frac{d}{\sin 55°} = \frac{6\,\text{cm}}{\sin 55°} = 7{,}3\,\text{cm}$$

Kineettisestä energiasta seuraa nopeus ja kaavasta (16-5) saadaan magneettivuon tiheydelle

$$B = \frac{mv}{Rq} = \frac{m\sqrt{\frac{2E_k}{m}}}{eR} = \frac{9{,}1\cdot10^{-31}\,\text{kg}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 8\cdot 10^{3}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{J}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\text{kg}}}}{1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{C}\cdot 7{,}32\cdot 10^{-2}\,\text{m}} = \underline{\underline{4{,}1\text{mT}}}$$

16.4. Sijoitetaan annetut arvot kaavaan (16-2)

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} = 1{,}6\cdot10^{-19}\text{C}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 5{,}0\cdot10^{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} & 0\\ 0{,}20\,\text{T} & 0{,}50\,\text{T} & 0\end{vmatrix} = 1{,}6\cdot10^{-19}\text{C}\cdot 0{,}20\text{T}\cdot 5{,}0\cdot10^{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\vec{k} = \underline{\underline{0{,}16\,\text{pN}\cdot\vec{k}}}.$$

16.6. Esimerkissä 16.2. käytettyjen koordinaattivalintojen mukaan nopeus on tässä tapauksessa $\vec{v} = v_y\vec{j}$ ja $v_y = 84\cdot10^{6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Kaavan (16-3) mukainen voima on

$$\vec{F} = (-e)\vec{v}\times\vec{B} = (-e)\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & v_y & 0\\ B_x & 0 & B_z\end{vmatrix} = (-e)v_y B_z\vec{i} - (-e)v_y B_x\vec{k}$$

Lasketaan esimerkin mukaisesti kiihtyvyyden komponentit. Aika on esimerkissä annettu ja poikkeamaksi saadaan $\underline{\vec{y} = 5{,}1\,\text{mm}\,\vec{i} + 1{,}7\,\text{mm}\,\vec{k}}$.

16.8. a) $\Delta d = d_2 - d_1 = 2r_2 - 2r_1 = \frac{2m_2 v}{Bq} - \frac{2m_1 v}{Bq} = \frac{2v}{Bq}(m_2 - m_1)$

$$= \frac{2\cdot 2{,}4\cdot10^{5}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot(37-35)\cdot 1{,}66\cdot10^{-27}\,\text{kg}}{0{,}50\text{T}\cdot 1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{C}} = 19{,}92\cdot10^{-3}\,\text{m} = \underline{\underline{2{,}0\,\text{cm}}}$$

b)

$$d_1 = \frac{2m_1 v}{B\cdot 2e} = 174{,}3\cdot10^{-3}\,\text{m} = \underline{\underline{17\,\text{cm}}}$$

$$d_2 = 184{,}3\cdot10^{-3}\,\text{m} = \underline{\underline{18\,\text{cm}}}$$

16.10. Ratkaistaan n kaavasta (16-8) ja sijoitetaan annetut arvot

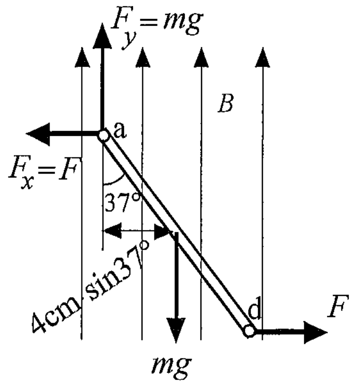
$$U_\text{H} = \frac{IBa}{neA} \Rightarrow n = \frac{IBa}{U_\text{H}ead} = \frac{32\,\text{A}\cdot 0{,}58\text{T}}{2\cdot10^{-6}\,\text{V}\cdot 1{,}6\cdot10^{-19}\,\text{C}\cdot10^{-3}\,\text{m}} = \underline{\underline{5{,}8\cdot10^{28}\,\frac{1}{\text{m}^3}}}$$

16.12. Voimat ovat $F_G = mg = \rho A l g$ ja $F_B = BIl$. Ne ovat yhtä suuret.

$$\Rightarrow I = \frac{\rho A g}{B} = \frac{2700\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 10^{-6}\,\text{m}^2\cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}80\,\text{T}} = \underline{\underline{33\,\text{mA}}}$$

– – – – – – – – – – – – –

16.14. Vain sivuihin ab ja dc kohdistuvat magneettikentän aiheuttamat voimat aikaansaavat silmukan kiertymistä. Kuvaan on piirretty nämä voimat. Momenttitasapaino pisteen a suhteen:



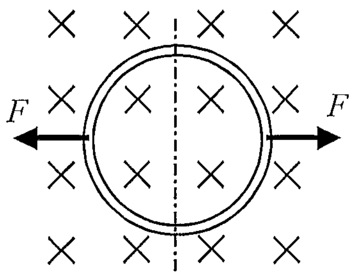
$$\sum M_a = -mg\cdot 4\cdot 10^{-2}\,\text{m}\cdot\sin 37° + F\cdot 8\cdot 10^{-2}\,\text{m}\cdot\cos 37° = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg\cdot 4\cdot 10^{-2}\,\text{m}\cdot\sin 37°}{8\cdot 10^{-2}\,\text{m}\cdot\cos 37°} = 51\cdot 10^{-3}\,\text{N}$$

$$F = BIl \Rightarrow B = \frac{F}{Il} = \frac{51\cdot 10^{-3}\,\text{N}}{1{,}6\,\text{A}\cdot 6\cdot 10^{-2}\,\text{m}} = \underline{\underline{0{,}54\,\text{T}}}$$

– – – – – – – – – – – – –

16.16. Esimerkin 16.5. mukaan silmukan puoliskoon vaikuttava voima on $F = IB2R$.
Puolikkaat ovat kiinni toisissaan "molemmista päistä", joten voima kohdistuu pinta-alaan $2A$. Jännitys on



$$\sigma = IB\frac{2R}{2A} = \frac{50\,\text{A}\cdot 1{,}8\,\text{T}\cdot 0{,}05\,\text{m}}{10^{-6}\,\text{m}^2} = \underline{\underline{4{,}5\,\text{MPa}}}$$

– – – – – – – – – – – – –

16.18. Tehtävän 15.1. mukaan virta on 1 mA. Silloin

$$m = IA = 10^{-3}\,\text{A}\cdot\pi\cdot(5{,}3\cdot 10^{-11}\,\text{m})^2 = \underline{\underline{8{,}8\cdot 10^{-24}\,\text{Am}^2}}$$

– – – – – – – – – – – – –

16.20. Osissa a virrat ovat vastakkaissuuntaiset, joten ne eivät aiheuta kenttää pisteessä P. Osa b on ympyränkaari, josta aiheutuva kenttä on (16-17) mukaan

$$B = \mu_0 H = \mu_0\cdot\frac{27°}{360°}\cdot\frac{I}{2R} = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}\cdot\frac{27°}{360°}\cdot\frac{14\,\text{A}}{2\cdot 0{,}02\,\text{m}} = \underline{\underline{33\,\mu\text{T}}}.$$

– – – – – – – – – – – – –

16.22. Kaavan (16-22) mukaan $H = \dfrac{I}{2\pi a}$.

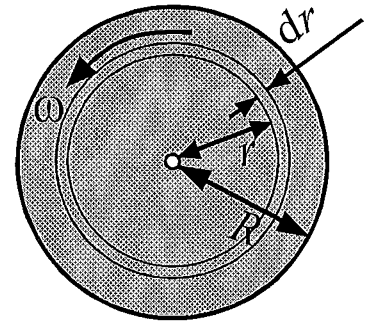
a) Piste on johtimen sisällä, josta seuraa, että vain osa virrasta on kenttäviivaa kuvaavan ympyrän sisällä. Saadaan
$$H = \frac{\frac{r^2}{R^2}I}{2\pi r} = \frac{\left(\frac{1\,\text{mm}}{2\,\text{mm}}\right)^2\cdot 80\,\text{A}}{2\pi\cdot 1\cdot 10^{-3}\,\text{m}} = \underline{\underline{3{,}2\cdot 10^3\,\frac{\text{A}}{\text{m}}}}$$

b) $$H_2 = \frac{I}{2\pi R} = \underline{\underline{6{,}4\cdot 10^3\,\frac{\text{A}}{\text{m}}}}$$

c) $$H_3 = \frac{I}{2\pi a_3} = \underline{\underline{4{,}2\cdot 10^3\,\frac{\text{A}}{\text{m}}}}$$

– – – – – – – – – – – – –

16.24. Levyn varaus on Q ja kiertoaika $2\pi/\omega$.
Varausalkio on dr leveä ympyrärengas. Alkion varaus on
$dQ = \dfrac{2\pi r \cdot dr}{\pi R^2} \cdot Q$. Kiertoaikana varaus kiertää kehän, joten



virta-alkio on $\mathrm{d}I = \dfrac{\mathrm{d}Q}{2\pi/\omega} = \dfrac{Q\,2r\omega}{2\pi R^2} \cdot \mathrm{d}r$. Kaavan (16-17)
mukaan kentän voimakkuuden alkio levyn keskipisteessä on

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}I}{2r} = \frac{Q\omega}{2\pi R^2} \cdot \mathrm{d}r.$$

Magneettivuon tiheydeksi levyn keskipisteessä tulee

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{Q\omega}{2\pi R^2} \cdot \int_0^R \mathrm{d}r = \underline{\underline{\frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi R}}}.$$

Luku 17

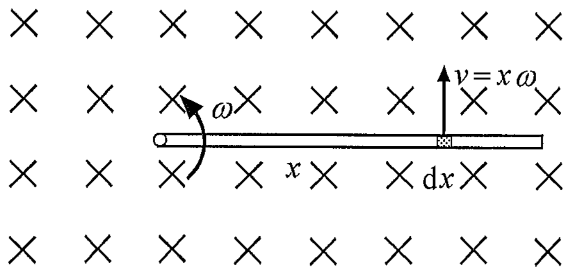
17.2. a) $I = \dfrac{E}{R} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t \cdot R} = -\dfrac{\Delta B \cdot A}{\Delta t \cdot R} = -\dfrac{(1{,}2-0.4)\mathrm{T} \cdot 50 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{1{,}5\,\mathrm{s} \cdot 2{,}0\,\Omega} = \underline{\underline{-1{,}3\,\mathrm{mA}}}$

b) $I = -\dfrac{\Delta B\, A \cos 40°}{1{,}5\ \mathrm{s} \cdot 2{,}0\,\Omega} = \underline{\underline{-1{,}0\,\mathrm{mA}}}$

17.4. $E = B_\mathrm{y} v l = 54{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{T} \cdot 10\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}2\,\mathrm{m} = 650{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V} = \underline{\underline{0{,}65\mathrm{mV}}}$

$B_\mathrm{y} = 57 \cdot 10^{-6}\mathrm{T} \cdot \sin 72° = 54{,}2 \cdot 10^{-6}\mathrm{T}$

17.6. Sauvan päästä etäisyydellä x oleva dx pituinen sauvan osa liikkuu nopeudella ωx. Silloin (17-5):n mukaisesti



a) $E = \int_0^l B\omega x \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} B\omega l^2$

b) Tulos on sama kuin edellä.

17.8. Virran muutos solenoidissa aikaansaa magneettivuon tiheyden muutoksen, joka (16-23):n mukaan on $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \dfrac{N_1}{l} \cdot \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$. Tämä vuon muutos kulkee myös keskikohdan ympärillä olevan käämin läpi. Silloin (17-4):n mukaan

$$E = -N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N_2\, A\, \mu_0 \frac{N_1}{l} \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} \cdot 900 \cdot 98 \cdot \pi \cdot (0{,}03\,\mathrm{m})^2}{0{,}50\,\mathrm{m}} \cdot 3{,}0\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}$$

$$= -1{,}88\,\mathrm{mV} = \underline{\underline{-1{,}9\,\mathrm{mV}}}$$

17.10. a) $E = 0$, sillä kyseisellä hetkellä virran (ja magneettivuon) muutosnopeus $\frac{dI}{dt} = 0$.

b) Kuvan 17-31 virralle saadaan yhtälö $I = 1{,}0\text{A} \cdot \sin 2\pi ft = 1{,}0\text{A} \cdot \sin(2\pi \cdot \frac{1}{1{,}2\text{s}} t)$.

Derivoidaan yhtälö ja sijoitetaan tehtävässä 17.8. lähdejännitteen lausekkeeseen

$$E = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}\frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l} \cdot 1{,}0\text{A} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{1{,}2\text{s}} \cos(2\pi \frac{1}{1{,}2\text{s}} t) = \underline{\underline{3{,}3\text{mV}}}$$

— — — — — — — — — — —

17.12. Sijoitetaan annetut arvot kaavaan (17-8), jonka mukaan huippuarvo esiintyy, kun käämin taso on kentän suuntainen.

$N = 10$ $\quad A = 0{,}20\text{m} \cdot 0{,}30\text{m}$ $\quad B = 0{,}10\text{T}$

$n = 600 \frac{\text{r}}{\text{min}} = 10 \frac{1}{\text{s}}$ $\quad \omega = 2\pi n$

$$\Rightarrow \quad \hat{E} = NAB\omega \sin 90° = 3{,}77\text{V} = \underline{\underline{3{,}8\text{V}}}$$

— — — — — — — — — — —

17.14. a) $E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta B \cdot A}{\Delta t} = -\frac{(0{,}12 - 0{,}10)\text{T} \cdot \pi \cdot (0{,}2\text{m})^2}{0{,}020\text{s}} = -0{,}126\text{V} = \underline{\underline{-130\text{mV}}}$

b) $\Delta W_k = eU = \underline{\underline{0{,}13\text{eV}}}$

c) $F = \frac{\Delta W_k}{2\pi r} = \underline{\underline{16 \cdot 10^{-21}\text{N}}}$

— — — — — — — — — — —

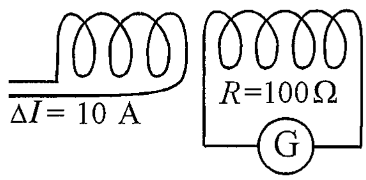
17.16. (17-1):n ja (16-23):n mukaan solenoidin magneettivuo on $\Phi = BA = \mu_0 \frac{NI}{l} A$.

Esimerkistä 17.8. saadaan $L = \frac{\mu_0 A N^2}{l}$. Yhdistämällä nämä saadaan

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{500 \cdot 0{,}14 \cdot 10^{-3}\text{Vs}}{2\text{A}} = \underline{\underline{35\text{mH}}}$$

— — — — — — — — — — —

17.18. Virran määritelmän (15-1) mukaan $I = \frac{2{,}4\mu\text{C}}{\Delta t}$.



Jännite saadaan Ohmin lain (15-4) ja keskinäisinduktanssin lähdejännitteen (17-9) perusteella. Yhdistämällä Δt supistuu.

$$U = IR = \frac{2{,}4\mu\text{C}}{\Delta t} \cdot 100\Omega$$

$$U = -M\frac{dI}{dt} = -M\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{2{,}4\mu\text{C}}{\Delta t} \cdot 100\Omega$$

$$\Rightarrow M = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-6}\text{C} \cdot 100\Omega}{10\text{A}} = \underline{\underline{24\ \mu\text{H}}}$$

— — — — — — — — — — —

17.20. **a)** Induktanssi ei vaikuta mitenkään "vakiovirtaan" $I = \dfrac{U}{R_1 + R_2} = \underline{\underline{1{,}0\ \mathrm{A}}}$

b) Äärettömän pitkän ajan kuluttua sulkemisesta kytkimen kautta kulkee virta $I_1 = \dfrac{20\,V}{5\,\Omega} = 4{,}0\ \mathrm{A}$ ja kelan (induktanssin) kautta ei kulje virtaa lainkaan. 0,010 s:n kuluttua kytkimen sulkemisesta kelan kautta kulkee vielä virta (17-15) $I_2 = 1{,}0\ \mathrm{A} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0{,}86\mathrm{A}$

Tällöin kytkimen kautta kulkee hetkellä 0,010 s virta $I = I_1 - I_2 = \underline{\underline{3{,}1\ \mathrm{A}}}$

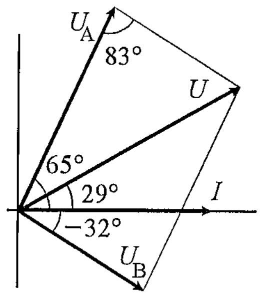
Luku 18

18.2. $\overline{U} = \overline{U}_\mathrm{A} + \overline{U}_\mathrm{B}$. Kosinilausetta käyttäen saadaan osoitinkuviosta U:n arvoksi

$$U = \sqrt{U_\mathrm{A}^2 + U_\mathrm{B}^2 - 2U_\mathrm{A}U_\mathrm{B}\cos 83^\circ} = \underline{\underline{34\ \mathrm{V}}}.$$

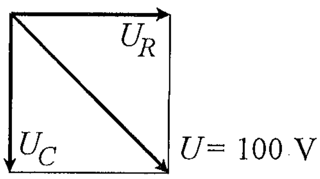
Kulma α saadaan sinilauseen avulla ja siitä edelleen φ

$$\frac{34\ \mathrm{V}}{\sin 83^\circ} = \frac{20\ \mathrm{V}}{\sin\alpha} \Rightarrow \alpha = 35{,}7^\circ \Rightarrow \varphi = 65^\circ - \alpha = \underline{\underline{29^\circ}}$$



18.4. Annettu U = 100V. Kuvan osoitinkolmioista

$$U_R = U_C = \frac{100\ \mathrm{V}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{71\ \mathrm{V}}}$$



18.6. $U_R = 12\ \mathrm{V}$, $U_\mathrm{K} = 16\ \mathrm{V}$, $U = 23\ \mathrm{V}$
$R = 12\,\Omega$ ja $f = 50\ \mathrm{Hz}$

a) Piirretään jänniteosoittimet, joista saadaan

$$U_\mathrm{K}^2 = U^2 + U_R^2 - 2UU_R\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{U_\mathrm{K}^2 - U^2 - U_R^2}{-2UU_R} = 40{,}94^\circ(139^\circ) = \underline{\underline{41^\circ}}$$

b) Käämin vaihesiirroksi saadaan

$$\frac{U}{\sin\alpha} = \frac{U_\mathrm{K}}{\sin 41^\circ} \Rightarrow \varphi_\mathrm{K} = 70{,}98^\circ.$$

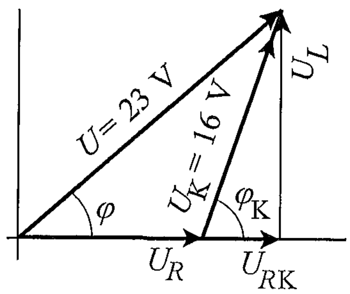
Piirin virta $I = \dfrac{U_R}{R} = \dfrac{12\ \mathrm{V}}{12\,\Omega} = 1{,}0\mathrm{A}$

Impedanssipiirroksesta saadaan $U_{R\mathrm{K}} = I\,R_\mathrm{K}$

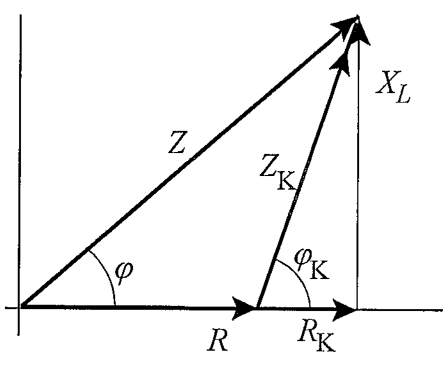
$$\Rightarrow R_\mathrm{K} = \frac{U_{R\mathrm{K}}}{I} = \frac{U_\mathrm{K}\cos 70{,}98^\circ}{I} = 5{,}37\,\Omega = \underline{\underline{5{,}4\,\Omega}}$$

$$L = \frac{U_\mathrm{K}\sin\varphi_\mathrm{K}}{2\pi f} = \underline{\underline{48\mathrm{mH}}}$$

a)



b)



18.8. Annettu $f_1 = 100\,\text{Hz}$, $f_2 = 300\text{Hz}$ ja $R = 100\,\Omega$. Vaadittu $Z_1 = 2Z_2$.

Kaavan (18-8) perusteella saadaan $\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{4\pi^2 f_1^2 C^2}} = 2\cdot\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{4\pi^2 f_2^2 C^2}}$.

Sijoitetaan arvot ja saadaan $C = \underline{\underline{6{,}8\cdot 10^{-6}\,\text{F}}}$

— — — — — — — — — — —

18.10. a) Resonanssi, kun $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{(9{,}0\cdot 10^3\,\frac{1}{\text{s}})^2\cdot 4\pi^2\cdot 6\cdot 10^{-9}\,\text{F}} = \underline{\underline{52\,\text{mH}}} \text{ ja } R = \frac{U}{I} = \frac{12\,\text{V}}{2\,\text{A}} = \underline{\underline{6{,}0\,\Omega}}$$

b) Resonanssissa $\cos\varphi = 1$. Silloin $P = UI = 12\,\text{V}\cdot 2\,\text{A} = \underline{\underline{24\,\text{W}}}$.

— — — — — — — — — — —

18.12. Lasketaan ensin taajuutta 250 Hz vastaava vaihesiirto

$$\tan\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{2\pi\cdot 250\frac{1}{\text{s}}\cdot 4\cdot 10^{-3}\,\text{H} - \dfrac{1}{2\pi\cdot 250\frac{1}{\text{s}}\cdot 20\cdot 10^{-6}\,\text{F}}}{6{,}00\,\Omega} = -4{,}26$$

$\Rightarrow \varphi = -76{,}8°$

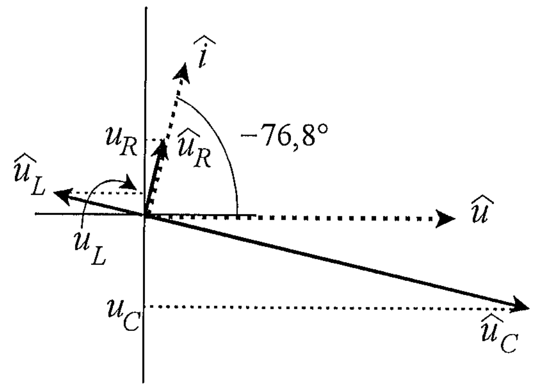
Virran huippuarvoksi saadaan $I\cdot\sqrt{2} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot\sqrt{2} = 3{,}323\,\text{A}$.

Silloin jännitteiden huippuarvot ovat

$\hat{u}_R = \hat{i}R = 19{,}4\,\text{V}$

$\hat{u}_L = \hat{i}\,2\pi f L = 20{,}3\,\text{V}$

$\hat{u}_C = \dfrac{\hat{i}}{2\pi f C} = 103\,\text{V}$



Hetkellisarvojen laskemista varten piirretään osoitinpiirros, josta

$u_R = \hat{u}_R \sin\varphi = \underline{\underline{19\,\text{V}}}$

$u_L = \hat{u}_L \cos\varphi = \underline{\underline{4{,}6\,\text{V}}}$

$u_C = \underline{\underline{-24\,\text{V}}}$

— — — — — — — — — — —

Luku 19

19.2. Kaavasta (19-5) saadaan $\hat{a} = \omega_0^2 \hat{y}$. Nyt $\omega_0 = 5400 \cdot \frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}}$ ja maksimivoima

$$\hat{F} = 0{,}65\,\mathrm{kg} \cdot \left(5400 \cdot \frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 0{,}040\,\mathrm{m} = \underline{8{,}3\,\mathrm{kN}}.$$

— — — — — — — — — — — —

19.4. $\hat{v} = 2\pi f_0 \hat{y} \;\Rightarrow\; f_0 = \frac{2{,}0\,\mathrm{m/s}}{2\pi \cdot 0{,}001\,\mathrm{m}} = \underline{320\,\mathrm{Hz}}.$

— — — — — — — — — — — —

19.6. Annettu $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_0}} = 1{,}50\,\mathrm{s}.$

a) Kaksi jousta peräkkäin $\Rightarrow$ Ripustettaessa poikkeama kaksinkertaistuu. Silloin

$$k_{\mathrm{per}} = \frac{k_0}{2} \;\Rightarrow\; T_{\mathrm{per}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_0/2}} = T_0 \cdot \sqrt{2} = \underline{2{,}12\mathrm{s}}.$$

b) Kaksi jousta rinnakkain $\Rightarrow$ Ripustettaessa poikkeama puolittuu. Silloin

$$k_{\mathrm{rinn}} = 2k_0 \;\Rightarrow\; T_{\mathrm{rinn}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k_0}} = T_0 / \sqrt{2} = \underline{1{,}06\mathrm{s}}.$$

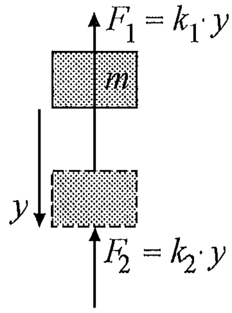
— — — — — — — — — — — —

19.8. Siirtymä y tasapainoasemasta ja vaikuttava voimaresultantti on

$$F = F_1 + F_2 = -(k_1 + k_2)\cdot y = -k\,y$$

Jouset ovat siis rinnakkain. Vrt. teht. 19.6.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \underline{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}}.$$



— — — — — — — — — — — —

19.10. Poikkeamasta y seuraa vesitilavuuden muutos Ay ja palauttava voima $F = \rho g A y$. Se on harmoninen voima, jonka jousivakio $k = \rho g A$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 2{,}0\,\mathrm{m}^2}{450\,\mathrm{kg}}} = \underline{1{,}05\,\mathrm{Hz}}.$$

— — — — — — — — — — — —

19.12. Tunnetaan $\hat{y} = 0{,}20\,\text{m}$ ja että poikkeamassa $y = 0{,}13\,\text{m}$ on $v = 0{,}98\,\text{m/s}$. Kysytään T_0 ja $\hat{a}$. Kaavan (19-5) poikkeamayhtälöstä saadaan ensin vaiheen sini

$$\sin\omega_0 t = \frac{0{,}13\,\text{m}}{0{,}20\,\text{m}} = 0{,}65 \Rightarrow \cos\omega_0 t = \sqrt{1-0{,}65^2} = 0{,}760.$$

Nopeuden yhtälöstä saadaan $\omega_0 = \dfrac{v}{\hat{y}\cos\omega_0 t} \Rightarrow T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi\cdot 0{,}20\,\text{m}\cdot 0{,}760}{0{,}98\,\text{m/s}} = \underline{0{,}97\,\text{s}}.$

Kiihtyvyyden yhtälöstä seuraa $\hat{a} = \omega_0^2\,\hat{y} = \dfrac{v^2}{\hat{y}\cos^2\omega_0 t} = \underline{8{,}3\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$

— — — — — — — — — — —

19.14. **a)** Verrataan annettua yhtälöä $y = 0{,}40\,\text{m}\cdot\sin(0{,}30\frac{1}{\text{s}}\cdot t + 0{,}50)$ ja kaavaa (19-3)

$\Rightarrow \underline{\hat{y} = 0{,}40\,\text{m}}$ ja $2\pi f_0 t = 0{,}30\frac{1}{\text{s}} \Rightarrow \underline{f_0 = 0{,}048\frac{1}{\text{s}}}$. Hetkellä $t = 0$ vaihe $\underline{\Phi = +0{,}50\,\text{rad}}$.

b) Derivoimalla $v = 0{,}30\frac{1}{\text{s}}\cdot 0{,}40\,\text{m}\cdot\cos(0{,}30\frac{1}{\text{s}}\cdot t + 0{,}50) = 0{,}12\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\cos(0{,}30\frac{1}{\text{s}}\cdot t + 0{,}50)$.

Toinen derivointi $a = -0{,}36\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin(0{,}30\frac{1}{\text{s}}\cdot t + 0{,}50)$.

c) Hetki $t = 0\,\text{s}$. $y_0 = 0{,}40\,\text{m}\cdot\sin(0{,}50\,\text{rad}) = \underline{+0{,}192\,\text{m}}.$

$v_0 = 0{,}12\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\cos(0{,}50\,\text{rad}) = \underline{+0{,}105\frac{\text{m}}{\text{s}}}.$

d) Vaihe hetkellä 5 s on $\Phi = 0{,}30\frac{1}{\text{s}}\cdot 5\,\text{s} + 0{,}50 = 2{,}0\,\text{rad}$. Silloin

$y_5 = 0{,}4\,\text{m}\cdot\sin 2 = \underline{0{,}36\,\text{m}}$, $v_5 = 0{,}12\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\cos 2 = \underline{-0{,}050\frac{\text{m}}{\text{s}}}$ ja $a_5 = -0{,}036\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\sin 2 = \underline{-0{,}033\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$. —

— — — — — — — — — — —

19.16. Alkutilanteesta seuraa $(m_1 + m_2)g = ky \Rightarrow k = \dfrac{(0{,}80+0{,}20)\,\text{kg}}{0{,}10\,\text{m}}\cdot 9{,}8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 98\dfrac{\text{kg}}{\text{s}^2}$.

Langan katketessa m_1 joutuu värähtelyyn, jossa $k\hat{y} = m_1 g$. Nyt saadaan

a) m_1 ”heilahtaa” ylöspäin matkan $2\hat{y} = \dfrac{m_1 g}{k} = \underline{0{,}040\,\text{m}}.$

b) m_1:n heilahdusten kulmataajuus on $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}}$ ja hetkellä $t = 0\,\text{s}$ on $y = -\hat{y}$. Silloin

kulma $\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$. Nyt saadaan m_1:n liikeyhtälöksi $y = \dfrac{m_1 g}{k}\cdot\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m_1}}\cdot t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

m_2:n putoamisaika $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ ja m_1:n asema sillä hetkellä

$$y = 2\,\text{cm}\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{98\,\text{kg/s}^2}{0{,}80\,\text{kg}}}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}0\,\text{m}}{9{,}8\,\text{m/s}^2}} - \frac{\pi}{2}\right) = -0{,}57\,\text{cm} \text{ tasapainokohdasta eli}$$

$2{,}0\,\text{cm} - 0{,}57\,\text{cm} = \underline{1{,}43\,\text{cm}}$ lähtötason yläpuolella.

— — — — — — — — — — — —

19.18. Kuvan perusteella saadaan palauttava momentti

$$M = mgr\sin\theta \overset{\text{pieni kulma}}{\approx} mgr\theta = D\theta$$

Kaavasta (19-11) ratkaistaan yhteinen hitausmomentti

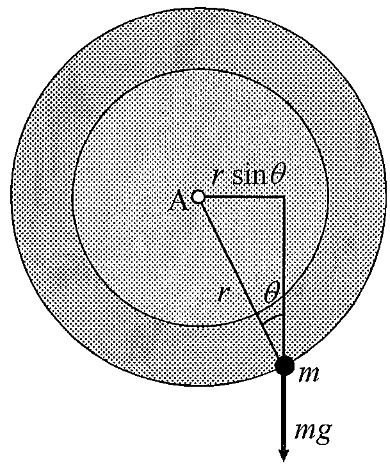
$$J_A = \frac{T^2 mgr}{4\pi^2} = \frac{3{,}14^2\,\mathrm{s}^2 \cdot 2\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}44\,\mathrm{m}}{4\pi^2}$$

$$= 2{,}15\,\mathrm{kgm}^2$$

Renkaan hitausmomentti on

$$J_{\text{rengas}} = J_A - mr^2 = (2{,}15 - 2 \cdot 0{,}44^2)\,\mathrm{kgm}^2$$

$$= \underline{1{,}8\,\mathrm{kgm}^2}.$$



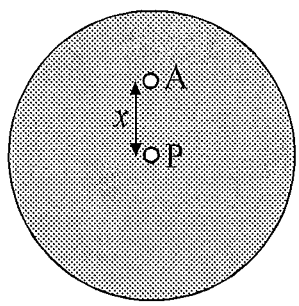
— — — — — — — — — — — —

19.20. Liipotin on harmoninen pyörähtelijä (19-9) $\Rightarrow$ $J\hat{\alpha} = D\hat{\theta}$ $\Rightarrow$ $\frac{D}{J} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\theta}}$. Sijoitetaan

kaavaan (19-11) $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\theta}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{40\ 1/\mathrm{s}^2}{72° \cdot \pi/180°}} = \underline{0{,}90\frac{1}{\mathrm{s}}}.$

— — — — — — — — — — — —

19.22. (19-14) $l_A = \frac{J_A}{mr_P} = \frac{\frac{1}{2}mR^2 + mx^2}{mx} = \underline{\frac{\frac{1}{2}R^2 + x^2}{x}}.$



a) Jaksonaika (19-13) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}R^2 + x^2}{gx}}$.

Minimi saadaan derivaatan nollakohdasta.

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}R^2 + x^2}{gx}\right)^{-0{,}5} \cdot \frac{2x \cdot gx - g \cdot \left(\frac{1}{2}R^2 + x^2\right)}{(gx)^2} = \pi \cdot \frac{(gx)^{0{,}5} \cdot g \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}R^2\right)}{\left(\frac{1}{2}R^2 + x^2\right)^{0{,}5} \cdot (gx)^2} = 0$$

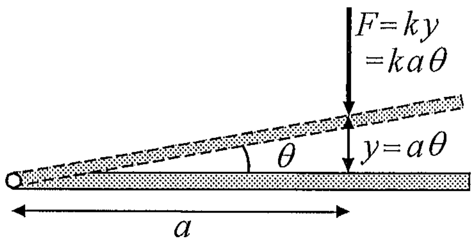
Derivaatta on nolla, jos osoittaja on nolla eli jos

$x^2 - \frac{1}{2}R^2 = 0$ josta $\underline{x = \frac{R}{\sqrt{2}}}$. $\left(T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{R\sqrt{2}}{g}}\right)$

— — — — — — — — — — — —

19.24. Kiertymä θ aiheuttaa palauttavan momentin

$M_A = Fa = ka^2\theta \ (= D\theta)$



Sauvan $J_A = \frac{1}{3}ml^2$. Sijoitus kaavaan (19-11)

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{D}{J_A}} = \sqrt{\frac{ka^2}{\frac{1}{3}ml^2}} = \underline{\frac{a}{l}\sqrt{\frac{3k}{m}}}.$$

Annetuilla arvoilla $\omega_0 = \frac{0{,}5\,\text{m}}{0{,}8\,\text{m}}\sqrt{\frac{3\cdot 100\,\text{kg}}{0{,}4\,\text{kg}\cdot\text{s}^2}} = \underline{17{,}1\frac{1}{\text{s}}}.$

19.26. Kaavat (19-4), (19-19) ja (19-21)

a) $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1500\,\text{kg}}{4\cdot 5\cdot 10^3\,\text{kg/s}^2}} = \underline{1{,}72\,\text{s}}.$

b) $\frac{1}{5}\hat{y}_0 = \hat{y}_0\cdot \text{e}^{-\frac{\beta}{2m}\cdot t} \Rightarrow -\ln 5 = -\frac{\beta}{2m}\cdot t \Rightarrow \beta = \frac{2\cdot 1500\,\text{kg}\cdot\ln 5}{\frac{1{,}72\,\text{s}}{2}} = \underline{5{,}6\cdot 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}}.$

c) $T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\cdot 5\cdot 10^3\,\text{kg/s}^2}{1500\,\text{kg}} - \frac{(5{,}6\cdot 10^3\,\text{kg/s})^2}{4\cdot(1500\,\text{kg})^2}}} = \underline{2{,}0\,\text{s}}.$

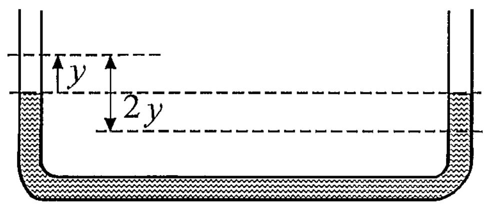
19.28. Sijoitus $t = 10\,T_1$ kaavaan (19-22)

$$\hat{y} = \hat{y}_0\cdot\text{e}^{-\delta\cdot 10T_1} \Rightarrow \ln\frac{\hat{y}_0}{\hat{y}} = \delta\cdot 10\,T_1 \Rightarrow \delta = \frac{\ln\frac{3{,}0°}{2{,}1°}}{10\cdot 2{,}0\,\text{s}} = \underline{0{,}0178\frac{1}{\text{s}}}.$$

19.30. Poikkeama y tasapainoasemasta aiheuttaa palauttavan voiman $F = m'g = 2yA\rho g$

$\Rightarrow$ Yhtälössä (19-2) on $k = 2A\rho g$.

Koko vesimassa on $m = Al\rho$.



Jaksonaika (19-4) on

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}} = 2\pi\sqrt{\frac{5{,}8\,\text{m}}{2\cdot 9{,}8\,\text{m/s}^2}} = \underline{3{,}4\,\text{s}}.$$

19.32. Silmukkaan vaikuttavan voiman on oltava nopeuteen verrannollinen. Magneettikentässä $F = BIl$ ja $E = \left|\dfrac{B\,\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right| = Blv$. Indusoituva virta $I = \dfrac{E}{R} = \dfrac{Blv}{R}$.

$\Rightarrow$ Vastusvoima $F_v = \dfrac{B^2 l^2}{R} \cdot v$ $\Rightarrow$ Vastuskerroin $\beta = \dfrac{B^2 l^2}{R}$.

Vaimennus on kriittinen, jos $\dfrac{k}{m} = \dfrac{\beta^2}{4m^2}$ eli $\beta = 2\sqrt{km}$.

Ripustustiedoista saadaan $mg = ky \Rightarrow k = \dfrac{mg}{y}$.

Nyt $\dfrac{B^2 l^2}{R} = 2\sqrt{\dfrac{mg}{y} \cdot m}$. Sijoitetaan R ja ratkaistaan B

$$B = \sqrt{32 \rho \rho_R \sqrt{\frac{g}{y}}} = \underline{0{,}25\,\mathrm{T}}.$$

$y = 0{,}064\,\mathrm{m}$

$\rho = 8930\,\mathrm{kg/m^3}$

$\rho_R = 17{,}2 \cdot 10^{-9}\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{m}$

$m = 4lA\rho$

$R = \rho_R \dfrac{4l}{A}$

19.34. Esimerkeistä saadaan $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$, $k = 50\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$, $\beta = 5{,}0\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$ ja $\delta = 1{,}25\,\dfrac{1}{\mathrm{s}}$.

a) Pakkovoiman taajuus on värähtelyn ominaistaajuus, joten kyseessä on nopeusresonanssi

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ ja (19-30) } \hat{y} = \frac{5{,}0\,\mathrm{N}}{2{,}0\,\mathrm{kg}\sqrt{0 + 4 \cdot \left(\dfrac{5{,}0\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}}{2 \cdot 2{,}0\,\mathrm{kg}}\right)^2 \cdot \dfrac{50\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}}{2{,}0\,\mathrm{kg}}}} = \underline{0{,}20\,\mathrm{m}}.$$

Resonanssissa $\varphi = \pi/2$.

b) $\omega = 2\omega_0 = 2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ Saadaan (19-30):n mukaan

$$\hat{y} = \frac{5{,}0\,\mathrm{N}}{2{,}0\,\mathrm{kg}\sqrt{\left(1^2 - 2^2\right)^2 \cdot \left(\dfrac{50\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}}{2{,}0\,\mathrm{kg}}\right)^2 + 4 \cdot 4 \cdot \left(\dfrac{5{,}0\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}}{2 \cdot 2{,}0\,\mathrm{kg}}\right)^2 \cdot \dfrac{50\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}}{2{,}0\,\mathrm{kg}}}} = \underline{0{,}032\,\mathrm{m}}.$$

Vaihe-ero (19-29)
$$\varphi = \arctan \frac{2 \cdot \sqrt{\dfrac{50\,\mathrm{kg/s^2}}{2{,}0\,\mathrm{kg}}} \cdot 5{,}0\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}}{50\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2} - 2{,}0\,\mathrm{kg} \cdot 4 \cdot \dfrac{50\,\mathrm{kg/s^2}}{2{,}0\,\mathrm{kg}}} = \underline{-18{,}4^\circ} = -0{,}32\,\mathrm{rad}.$$

19.36. Amplitudin pienenemisestä saadaan

$$\frac{\hat{y}_0}{2} = \hat{y}_0 \mathrm{e}^{-\frac{50T_0}{\tau}} \Rightarrow \ln 2 = \frac{50T_0}{\tau} \overset{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}{\Rightarrow} \ln 2 = \frac{50 \cdot 2\pi}{\omega_0 \tau}$$

Nyt saadaan (19-25) mukaan $Q = \frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{50 \cdot 2\pi}{2 \cdot \ln 2} = 227 \approx \underline{230}.$

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2Q}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2 \cdot 227 \cdot \sqrt{\frac{0{,}30\,\mathrm{m}}{9{,}8\,\mathrm{m/s^2}}} = \underline{79\,\mathrm{s}}.$$

Esimerkin 19.9. mukaan $\hat{x}_\mathrm{k} = \frac{\hat{x}}{Q} = \frac{60\,\mathrm{mm}}{227} = \underline{0{,}26\,\mathrm{mm}}.$

— — — — — — — — — — —

Luku 20

20.2. Perusyhtälö (20-6) $v = f\lambda$ ja yhtälön (20-7) vaihe-ero

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = \frac{2\pi f}{v} \cdot x = \frac{2\pi 500 \frac{1}{\mathrm{s}}}{330 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1{,}52 \cdot 2\pi\,\mathrm{rad} \mathrel{\hat{=}} \underline{0{,}52 \cdot 2\pi\,\mathrm{rad} = 185°}.$$

— — — — — — — — — — —

20.4. Tasainen liike ja aaltoliikkeen etenemisnopeus ilmassa

$$s = vt = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \cdot t = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 8{,}31 \cdot (273 + 20) \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2\,K\,mol}} \cdot \mathrm{K}}{29 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}}} \cdot 8{,}2\,\mathrm{s} = \underline{2{,}8\,\mathrm{km}}.$$

— — — — — — — — — — —

20.6. Tasainen liike, tuplamatka ja etenemisnopeus vedessä

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2h}{\sqrt{\frac{K}{\rho}}} = \frac{2 \cdot 60\,\mathrm{m}}{\sqrt{\frac{2{,}1 \cdot 10^9\,\mathrm{kg\,m/(s^2\,m^2)}}{1000\,\mathrm{kg/m^3}}}} = \underline{83\,\mathrm{ms}}.$$

— — — — — — — — — — —

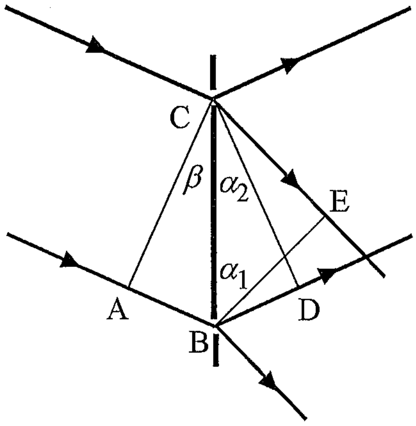
20.8. Annettu $\hat{y}_1 = 3\,\mathrm{cm}$, $\hat{y}_2 = 4\,\mathrm{cm}$ ja $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0$

Sijoitus kaavaan (20-10) $\hat{y} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0}\,\mathrm{cm} = \underline{5{,}0\,\mathrm{cm}}.$

— — — — — — — — — — —

20.10. Kaava (20-35) $\Rightarrow \frac{f_\mathrm{L}}{f_\mathrm{H}} = \frac{v + 1{,}5v}{v} = \underline{2{,}5}.$

— — — — — — — — — — —



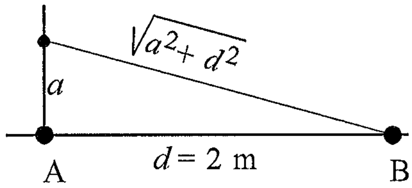
20.12. Vahvistuksessa matkaeron on oltava täysiä aallonpituuksia. Kuvan kaksi eri vahvistuskulmaa toteutuvat yhtälöillä

$$\overline{BD} + \overline{AB} = d\sin\alpha_2 + d\sin\beta = k\lambda$$

$$\overline{CE} - \overline{AB} = d\sin\alpha_1 - d\sin\beta = k\lambda$$

20.14. Annettu $v = 340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja $f = 400\,\frac{1}{\text{s}}$

$\Rightarrow\ \lambda = 0{,}85\,\text{m}.$



Kuvan perusteella matkaero on $\sqrt{d^2 + a^2} - a$

a) Minimikohdassa matkaero on aallonpituuden pariton puolikas eli

$$\sqrt{d^2 + a^2} - a = k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \Big|\ k = 1,3,5,\ldots \quad \text{Ratkaistaan } a$$

$$a = \frac{d^2 - k^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{k \cdot \lambda}.$$ Sijoitetaan arvot ja

$k = 1 \Rightarrow a_1 = \underline{4{,}49\,\text{m}}$

$k = 3 \Rightarrow a_3 = \underline{0{,}93\,\text{m}}$

$k = 5 \Rightarrow$ mahdoton.

b) Maksimikohdassa matkaero on täysiä aallonpituuksia.

$$\sqrt{d^2 + a^2} - a = k \cdot \lambda \quad \Big|\ k = 1,2,3,\ldots \quad \text{Ratkaistaan } a$$

$$a = \frac{d^2 - k^2 \cdot \lambda^2}{2k \cdot \lambda}$$ Silloin

$k = 1 \Rightarrow a_1 = \underline{1{,}93\,\text{m}}$

$k = 2 \Rightarrow a_2 = \underline{0{,}33\,\text{m}}$

$k = 3 \Rightarrow$ mahdoton.

20.16. Kaavasta (20-22) saadaan

$$F = 4 f_0^2\, l^2 A\rho = 4 f_0^2\, l m = 4 \cdot 330^2 \frac{1}{\text{s}^2} \cdot 0{,}65\,\text{m} \cdot 120 \cdot 10^{-6}\,\text{kg} = \underline{34\,\text{N}}.$$

F kasvaa 10 %. Saadaan $\begin{cases} f_0 \propto \sqrt{F} \\ f_1 \propto \sqrt{1{,}1 \cdot F} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{f_1}{f_0} = \sqrt{1{,}1} = 1{,}0149 \Rightarrow$ Muutos $\underline{4{,}9\,\%}$.

20.18. Sijoitetaan v yhtälöstä (20-26) yhtälöön (20-28) ja saadaan

$$l = \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{T}{\text{K}}}}{4 f_0} = \frac{20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{293\,\text{K}}{\text{K}}}}{4 \cdot 264\,\frac{1}{\text{s}}} = \underline{0{,}32\,\text{m}}.$$

20.20. Muokataan yhtälöä (20-22)

$$f_0 = \frac{1}{2l}\cdot\sqrt{\frac{F}{A\rho}} = \frac{1}{2l}\cdot\sqrt{\frac{F}{\frac{Al\rho}{l}}} = \frac{1}{2l}\cdot\sqrt{\frac{F}{\frac{m}{l}}} = \frac{1}{2\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}}\cdot\sqrt{\frac{88\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}}{\frac{0{,}5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{0{,}5\,\mathrm{m}}}} = \underline{297\,\mathrm{Hz}.}$$

$$f_2 = 3f_0 = \underline{890\,\mathrm{Hz}.}$$

20.22. a) Poika liikkuu lähdettä kohti nopeudella v_1 ja lähde liikkuu poikaa kohti nopeudella v_1. Yhdistetään (20-34) ja (20-36), jolloin saadaan

$$f_\mathrm{H} = \frac{v+v_1}{v-v_1}\cdot f_\mathrm{L} = \frac{345\,\mathrm{m/s}}{335\,\mathrm{m/s}}\cdot 440\,\mathrm{Hz} = 453\,\mathrm{Hz}. \quad \overset{(20\text{-}15)}{\Rightarrow} \quad \Delta f = \underline{13\,\mathrm{Hz}.}$$

b) Tässä poika "lähestyy" lähdettä nopeudella 2·3 m/s. Sijoitus (20-36):een

$$f_\mathrm{H} = \frac{340+2\cdot 3}{340}\cdot 440\,\mathrm{Hz} = 447{,}8\,\mathrm{Hz} \Rightarrow \Delta f = \underline{7{,}8\,\mathrm{Hz}.}$$

Luku 21

21.2. Oletetaan alkuperäiseksi äänenpaineeksi p. Siitä puolet on $p/2$. Painetasoiksi saadaan

$$L_1 = 20\cdot\lg\frac{p}{p_0} \quad \text{ja} \quad L_2 = 20\cdot\lg\frac{p}{2p_0}$$

Painetason pieneneminen on

$$L_1 - L_2 = 20\cdot\lg\frac{p}{p_0} - 20\cdot\lg\frac{p}{2p_0} = 20\cdot(\lg\frac{p}{p_0} - \lg\frac{p}{2p_0}) = 20\cdot\lg\frac{p\cdot 2p_0}{p_0 p}$$

$$= 20\cdot\lg 2 = 6{,}02\mathrm{dB} = \underline{\underline{6{,}0\mathrm{dB}}}$$

21.4. Äänenpainetasosta saadaan intensiteetti

$$L = 10\cdot\lg\frac{I}{I_0} \Rightarrow I = I_0\cdot 10^{L/10} = 10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\cdot 10^{85/10} = 316{,}2\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Puoliavaruus on $2\pi R^2$. Kaavan (21-17) mukaisesti saadaan intensiteetti ja siitä kysytty teho

$$I = \frac{P}{2\pi R^2} \Rightarrow P = I\cdot 2\pi R^2 = 316{,}2\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\cdot 2\pi\cdot(7{,}5\,\mathrm{m})^2 = 111\,\mathrm{mW} = \underline{\underline{110\,\mathrm{mW}}}$$

21.6. Annettu $P_1 = 4{,}0\,\mathrm{W}$, $R_1 = 12\,\mathrm{m}$; $P_2 = 6{,}0\,\mathrm{W}$, $R_2 = 18\,\mathrm{m}$. Tunnetaan $I_0 = 1\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

$$L = 10\cdot\lg\frac{I_1+I_2}{I_0} = 10\cdot\lg\left(\frac{\frac{P_1}{4\pi R_1^2}+\frac{P_2}{4\pi R_2^2}}{I_0}\right) = 98{,}67\mathrm{dB} = \underline{\underline{99\mathrm{dB}}}$$

21.8. a)

$$I_{tot} = I_0(10^{9,5} + 10^{8,8} + 10^{8,0} + 10^{6,8} + 10^{6,5} + 10^{6,1} + 10^{6,0} + 10^{6,0}) = I_0 \cdot 3{,}906 \cdot 10^9$$

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I_{tot}}{I_0} = 95{,}9\text{dB} = \underline{\underline{96\text{dB}}}$$

b) Katsotaan suodatinkäyrältä vaimennukset. Täten äänenvoimakkuuksiksi saadaan seuraavat arvot: 60, 61, 65, 60, 62, 61, 62 ja 61 dB. Lasketaan samoin kuin a)-kohta:

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I_{tot}}{\mathrm{I}_0} = \underline{\underline{70\text{dB}}}$$

21.10. $I = \dfrac{p^2}{\rho v}$ (21-6):n mukaan $\hat{p} = 2\pi \rho \lambda f^2 \hat{y}$ ja (21-9) $I = 2\pi^2 f^2 \rho v \hat{y}^2$.

$$\Rightarrow \frac{\hat{p}^2}{2\rho v} = \frac{4\pi^2 \rho^2 \lambda^2 f^4 \hat{y}^2}{2\rho v} = 2\pi^2 \rho f^2 v \hat{y}^2 \underline{\underline{= I}}$$

21.12. Esimerkin 21.6 lähtötiedoin seinälle tulee ääniteho $P_S = A_S I$ ja ovelle $P_O = A_O I$.

Seinän läpi menee teho $P_S \cdot 10^{-5,1}$ ja oven läpi vastaavasti $P_O \cdot 10^{-2,8}$.

$$\Rightarrow \frac{P_S \cdot 10^{-2,8}}{P_O \cdot 10^{-5,1}} = \frac{A_S I \cdot 10^{-2,8}}{A_O I \cdot 10^{-5,1}} = \frac{2 \cdot 10^{5,1}}{10 \cdot 10^{2,8}} = \underline{\underline{40}}$$

21.14. Seinän läpäisysuhde

$$\tau = \frac{\sum \tau_i A_i}{A} = \frac{17\,\text{m}^2 \cdot 10^{-5} + 2\text{m}^2 \cdot 10^{-2,6} + 3\text{m}^2 \cdot 10^{-2,1}}{22\,\text{m}^2} = 1{,}319 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow R = 10 \cdot \lg \frac{1}{\tau}\,\text{dB} = 28{,}8\,\text{dB} = \underline{\underline{29\,\text{dB}}}$$

21.16. a) $V = 5\,\text{m} \cdot 11\,\text{m} \cdot 16\,\text{m} = 880\,\text{m}^3$, $\alpha = 0{,}05$, $\alpha_i A_i = 0{,}4\text{m}^2$ N = 200

40% lattiasta varjostuu, kun sali on täynnä. Silloin (21-24) antaa

$$T_1 = 0{,}16 \frac{\text{s}}{\text{m}} \cdot \frac{V}{A} = 0{,}16 \cdot \frac{880\,\text{s}}{0{,}05 \cdot 2(11 \cdot 16 + 5 \cdot 11 + 5 \cdot 16)} = \underline{\underline{4{,}5\text{s}}}$$

$$T_2 = 0{,}16 \cdot \frac{880\,\text{s}}{0{,}05 \cdot (622 - 0{,}4 \cdot 11 \cdot 16) + 0{,}4 \cdot 200} = \underline{\underline{1{,}3\,\text{s}}}$$

b) $T = 0{,}8\,\text{s}$, $\alpha_L = 0{,}75$

$$T = 0{,}16 \cdot \frac{880\,\text{s}}{0{,}4 \cdot 200 + 0{,}05(2 \cdot 5 \cdot (11+16) - \text{A}) + 0{,}05(2 \cdot 11 \cdot 16 - 0{,}4 \cdot 16 \cdot 11) + 0{,}75\text{A}}$$

$$\Rightarrow A = 97{,}7\,\text{m}^2 = \underline{\underline{98\,\text{m}^2}}$$

Luku 22

22.2. Annettu $C = 100\ldots400$ pF ja $f_{min} = 0{,}80$ MHz. Kaavan (22-2) mukaan

$$f_{\min} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{\max}}} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f_{\min}^2 C_{\max}} = \underline{\underline{99\,\mu\text{H}}}$$

$$f_{\max} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{\min}}} = \underline{\underline{1{,}6\text{ MHz}}}$$

22.4. a) (22-7):n mukaan $\tau = \frac{2L}{R} = \frac{2\cdot 40\text{ mH}}{10\,\Omega} = \underline{\underline{8{,}0\text{ ms}}}$

$$(22\text{-}8) \Rightarrow Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot L}{R} = \frac{2282\frac{1}{\text{s}}\cdot 40\text{ mH}}{10\,\Omega} = \underline{\underline{9{,}1}}$$

$$n = \frac{Q}{\pi} = \underline{\underline{2{,}9}}$$

b) $$Q_{kr} = \frac{1}{2} = \frac{\omega_0 L}{R_{kr}} \Rightarrow R_{kr} = 2\omega_0 L = 2\cdot 2282\frac{1}{\text{s}}\cdot 40\text{ mH} = 183\,\Omega = \underline{\underline{180\,\Omega}}$$

22.6. a) $$H = \frac{E}{Z_0} = \frac{E}{\mu_0 c} = \frac{12\frac{\text{V}}{\text{m}}}{377\Omega} = \underline{\underline{0{,}032\frac{\text{A}}{\text{m}}}}$$

b) $$P = IA = \frac{E^2}{Z_0}\cdot 0{,}010 r^2 = 0{,}38\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\cdot 10^4\,\text{m}^2 = \underline{\underline{3{,}8\text{kW}}}$$

c) $$E_{100} = 10\cdot E_{1000} = \underline{\underline{120\frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$

22.8. Lasketaan ensin säteen intensiteetti

$$I = \frac{P}{A} = \frac{2\cdot 10^{-3}\text{ W}}{\pi\cdot(0{,}5\cdot 10^{-3}\text{ m})^2} = 2{,}546\cdot 10^3\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

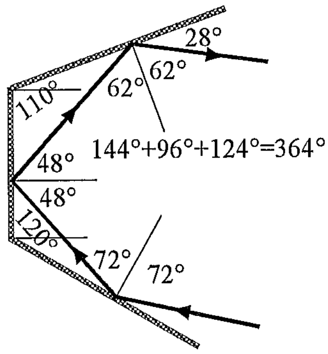
$$E = \sqrt{\mu_0 c I} = \sqrt{1{,}26\cdot 10^{-6}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}\cdot 3\cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 2{,}546\cdot 10^3\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}} = \underline{\underline{980\frac{\text{V}}{\text{m}}}}$$

$$B = \frac{E}{c} = \underline{\underline{3{,}3\cdot 10^{-6}\text{ T}}}$$

Luku 23

23.2.

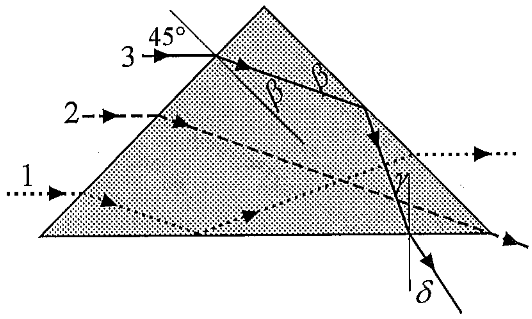
Merkitään perättäiset heijastukset annettuun kuvaan.



a) Kuvan mukaan $\underline{62°}$.

b) Säde kiertyy 364°, joten säteiden suuntien välinen kulma on $\underline{176°}$.

23.4. Kolme eri mahdollisuutta



Säde 1 taittuu ja kokonaisheijastuu prisman pitkältä sivulta ja jatkaa toisen kerran taituttuaan alkuperäisen suuntaisena, jolloin kulma on $\underline{0°}$.

Säde 2 (teoreettinen) kulkee prisman nurkkasärmän kautta, eikä taitu toista kertaa.

$1 \cdot \sin 45° = 1{,}65 \cdot \sin\beta \;\Rightarrow\; \beta = 25{,}4°$

Kulma = 45° + 90° + 25,4° = $\underline{160°}$.

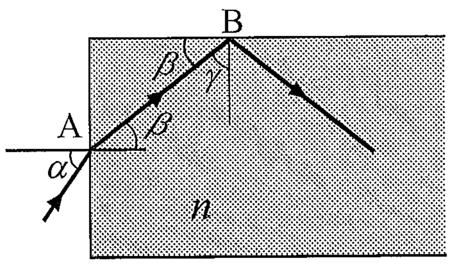
Säde 3 taittuu ja kokonaisheijastuu lyhyeltä sivulta ja tulee pitkälle sivulle kulmassa $\gamma = 19{,}6°$.

Taitekulmalle δ $\quad 1{,}65 \cdot \sin 19{,}6° = 1 \cdot \sin\delta \;\Rightarrow\; \delta = 33{,}6°$.

Kulma on 90° + 33,6° = $\underline{124°}$.

23.6. Kokonaisheijastuksen rajakulma B:ssä

$$\sin\gamma = \frac{1}{n}. \;\Rightarrow\; \cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}.$$



Kuvan perusteella $\sin\beta = \cos\gamma$

a) Taittuminen A:ssa

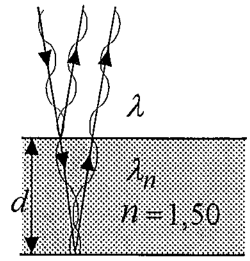
$$\sin\alpha = n \cdot \sin\beta = n \cdot \cos\gamma = n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = \sqrt{n^2-1}$$

Jotta myös 90° kulmassa tuleva säde jatkaisi on oltava

$$1 \cdot \sin 90° = 1 = \sqrt{n^2-1} \;\Rightarrow\; n = \sqrt{2} = \underline{1{,}41}.$$

b) Jos n = 1,33 saadaan $\quad \sin\alpha = \sqrt{1{,}33^2 - 1} \;\Rightarrow\; \underline{\alpha = 61{,}3°}$.

23.8. Vahvistuksessa matkaero kaavassa (23-5) on kokonaisluku. ($2d$ = pariton lukumäärä aallonpituuden $\lambda_n = \dfrac{\lambda}{n}$ puolikkaita.)



$$\Delta = \frac{2nd}{\lambda} - \frac{1}{2} = k \Rightarrow d = \frac{\lambda}{4n}\cdot(2k+1)$$

$k = 0 \Rightarrow d = \underline{92\ \text{nm}}$, $\quad k = 1 \Rightarrow d = \underline{275\ \text{nm}}$,

Yleisesti

$\underline{d = (92 + k\cdot 183)\ \text{nm}}$.

23.10. **a)** Heikennyksessä matkaero on 0,5 aallonpituutta, ja tulopinnassa tapahtuva vaihesiirto huomioiden

$\dfrac{2d}{\lambda/n} + \dfrac{1}{2} = k + \dfrac{1}{2}$. Kun $k = 1$, on $d = \dfrac{\lambda}{2n} = \dfrac{590\,\text{nm}}{2\cdot 1{,}42} = \underline{208\,\text{nm}}$.

b) Vahvistuksessa matkaeron on oltava täysi aallonpituus, joten

$\dfrac{2d}{\lambda/n} + \dfrac{1}{2} = k$. Kun $k = 1$, on $d = \dfrac{\lambda}{4n} = \dfrac{590\,\text{nm}}{4\cdot 1{,}42} = \underline{104\,\text{nm}}$.

23.12. Katso esimerkki 23.5.

$$\begin{cases} d_1 = 2\sqrt{\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\lambda R} \\ d_2 = 2\sqrt{\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{n}R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1^2 = 4\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\lambda R \\ d_2^2 = 4\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{n}R \end{cases} \Rightarrow n = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{1{,}40^2}{1{,}27^2} = \underline{1{,}22}.$$

23.14. Kaava (23-7)

$$a = \frac{k\lambda}{\sin\theta} \approx \frac{k\lambda}{\tan\theta} = \frac{1\cdot 590\cdot 10^{-9}\ \text{m}}{2\cdot 0{,}75\,\text{m}} \approx 0{,}158\cdot 10^{-3}\,\text{m} \approx \underline{0{,}16\,\text{mm}}.$$

23.16. Kaava (23-12) $\Rightarrow \lambda = \dfrac{d\sin\theta}{k} \overset{k=1}{=} d\sin\theta$.

Keltaisen viivan aallonpituus on $\lambda_{\text{kelt}} = \dfrac{1\cdot 10^{-3}\,\text{m}}{590}\cdot\dfrac{310\,\text{mm}}{\sqrt{860^2+310^2}\ \text{mm}} \approx \underline{575\,\text{nm}}$.

Vastaavasti $\lambda_{\text{vihreä}} = 543$ nm, $\lambda_{\text{sininen}} = 434\,\text{nm}$ ja $\lambda_{\text{violetti}} = 402\,\text{nm}$.

23.18. Kaava (23-4) $\Rightarrow n_2 = 1\cdot\tan 57° = \underline{1{,}54}$.

Kohtisuoruusehto kuvassa 23-8 antaa $\alpha_2 = 90° - 57° = \underline{33°}$.

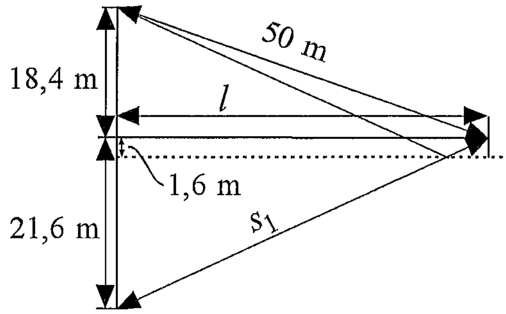
Vaihtoehtoisesti taittumislaki (23-2) antaa $\sin 57° = 1{,}54\cdot\sin\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \underline{33°}$.

Luku 24

24.2. Kuva heijastuu lammen pinnasta ja viereisen kuvion kolmioista saadaan:

$l = \sqrt{50^2 - 18{,}4^2}\ \text{m} = 46{,}49\,\text{m}$ ja

$s_1 = \sqrt{46{,}49^2 + 21{,}6^2}\ \text{m} = \underline{51\,\text{m}}.$



— — — — — — — — — — — —

24.4. Pallopeilin yhtälössä $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ tunnetaan $a = 1{,}20$ m ja b voidaan päätellä tapauskohtaisesti ja sen jälkeen f on ratkaistavissa.

a) todellinen => $b = 0{,}80$ m => $\underline{f = 0{,}48 \text{ m} \Rightarrow \text{kovera}}$.

b) valekuva => $b = -3{,}20$ m => $\underline{f = 1{,}92 \text{ m} \Rightarrow \text{kovera}}$.

c) valekuva => $b = -0{,}60$ m => $\underline{f = -1{,}20 \text{ m} \Rightarrow \text{kupera}}$.

d) todellinen ja kaksinkertainen => $b = 2{,}40$ m => $\underline{f = 0{,}80 \text{ m} \Rightarrow \text{kovera}}$.

e) valekuva ja kaksinkertainen => $b = -2{,}40$ m => $\underline{f = 2{,}40 \text{ m} \Rightarrow \text{kovera}}$.

f) todellinen ja kolmasosa => $b = 0{,}40$ m => $\underline{f = 0{,}30 \text{ m} \Rightarrow \text{kovera}}$.

g) valekuva ja kolmasosa => $b = -4{,}40$ m => $\underline{f = -0{,}60 \text{ m} \Rightarrow \text{kupera}}$.

— — — — — — — — — — — —

24.6. Peiliyhtälössä on nyt $a = x + f$ ja $b = x' + f$

$\frac{1}{x+f} + \frac{1}{x'+f} = \frac{1}{f}$. Tehdään vasen puoli samannimisiksi $\frac{x'+f+x+f}{(x+f)(x'+f)} = \frac{1}{f}$.

Kerrotaan ristiin $f x' + f^2 + f x + f^2 = x x' + f x + f x' + f^2$. Sievennetään $\underline{x x' = f^2}$.

— — — — — — — — — — — —

24.8. Kaavat (24-3) ja (24-4)

$$\frac{1}{8{,}0\,\text{cm}} + \frac{1{,}5}{b} = \frac{1}{6{,}0\,\text{cm}} \Rightarrow \underline{b = 12\,\text{cm, huipusta oikealle.}}$$

$$m = -\frac{1}{1{,}5} \cdot \frac{12\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} = \underline{-1}.$$

— — — — — — — — — — — —

24.10. Katso tehtävän 24.6. ratkaisu.

— — — — — — — — — — — —

24.12. Edellisen linssin kuva on aina seuraavan linssin esine.
Lasketaan siis kukin linssi erikseen.

1. linssi $\dfrac{1}{9{,}0\,\text{cm}}+\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{6{,}0\,\text{cm}} \Rightarrow b_1=18\,\text{cm} \Rightarrow a_2=8\,\text{cm}-18\,\text{cm}=-10\,\text{cm}$

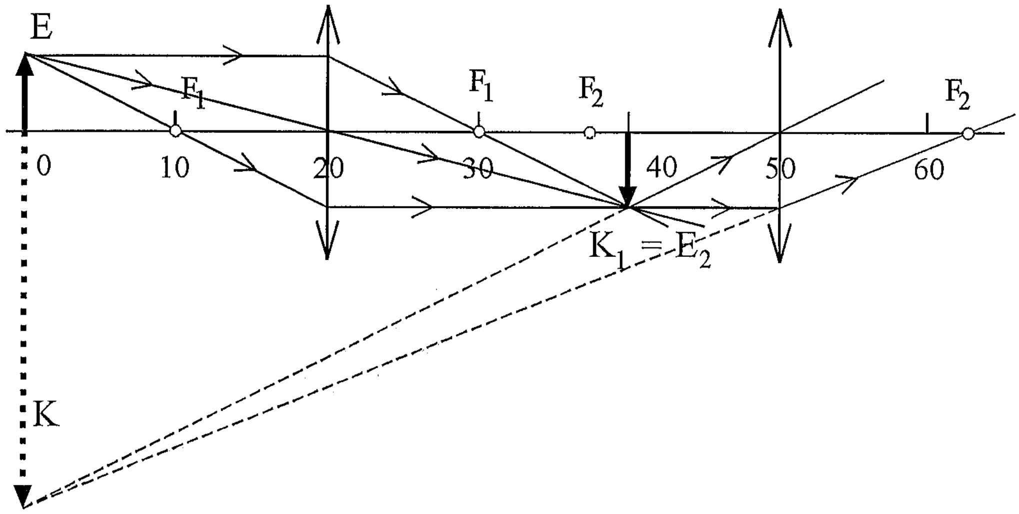
2. linssi $\dfrac{1}{-10{,}0\,\text{cm}}+\dfrac{1}{b_2}=\dfrac{1}{-15{,}0\,\text{cm}} \Rightarrow b_2=30\,\text{cm} \Rightarrow a_3=-15\,\text{cm}$

3. linssi $\dfrac{1}{-15{,}0\,\text{cm}}+\dfrac{1}{b_3}=\dfrac{1}{10{,}0\,\text{cm}} \Rightarrow \underline{b_3=6{,}0\,\text{cm}\ \text{kolmannesta linssistä}}.$

Suurennus $m=\left(-\dfrac{b_1}{a_1}\right)\cdot\left(-\dfrac{b_2}{a_2}\right)\cdot\left(-\dfrac{b_3}{a_3}\right)=\underline{-2{,}4}.$

— — — — — — — — — — —

24.14. $a_1=20\,\text{cm}$ $f_1=10\,\text{cm}$ $\Delta=30\,\text{cm}$ $f_2=12{,}5\,\text{cm}$



Ensimmäinen linssi antaa $\dfrac{1}{20\,\text{cm}}+\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{10\,\text{cm}} \Rightarrow b_1=20\,\text{cm} \Rightarrow a_2=10\,\text{cm}$.

Toinen linssi antaa $\dfrac{1}{10\,\text{cm}}+\dfrac{1}{b_2}=\dfrac{1}{12{,}5\,\text{cm}} \Rightarrow \underline{b_2=-50\,\text{cm}}.$

Annettujen mittojen perusteella kuva on alkuperäisen esineen kohdalla nurinpäin.

$$m=\left(-\frac{20}{20}\right)\cdot\left(-\frac{-50}{10}\right)=\underline{-5 \Rightarrow \text{virtuaalinen}}.$$

— — — — — — — — — — —

24.16. Filmille tulevan valomäärän oltava vakio, joten

$$\left(\frac{1}{5{,}6}\right)^2:\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{250}:\frac{1}{50} \Rightarrow x=2{,}5\approx\underline{2{,}8}.$$

— — — — — — — — — — —

24.18. Lasien polttoväli $f=\dfrac{1}{D}=\dfrac{\text{m}}{1{,}25}=0{,}80\,\text{m}$. Silloin

$$\frac{1}{0{,}30\,\text{m}}+\frac{1}{b}=\frac{1}{0{,}80\,\text{m}} \Rightarrow \underline{b=-0{,}48\,\text{m}}.$$

— — — — — — — — — — —

24.20. $\frac{1}{\infty}+\frac{1}{-b}=-2{,}0\frac{1}{\mathrm{m}} \Rightarrow \underline{b=50\,\mathrm{cm}.}$

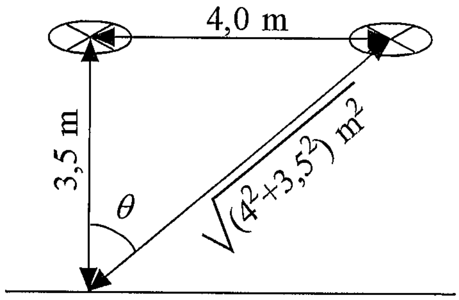
Luku 25

25.2. Kaavoista (25-3) ja (25-1) ratkaistaan valovirta

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= I\omega \\ \omega &= \frac{A}{r^2}\mathrm{sr}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Phi=\frac{IA}{r^2}\mathrm{sr}=\frac{80\,\mathrm{cd}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{sr}}{2{,}4^2\,\mathrm{m}^2}=\underline{0{,}83\,\mathrm{lm}.}$$

25.4. $I=\dfrac{\Phi_{\mathrm{tot}}}{\frac{4\pi}{3}\mathrm{sr}} \Rightarrow E=\dfrac{3\Phi_{\mathrm{tot}}}{4\pi\,\mathrm{sr}\cdot r^2}\cos\theta\cdot\mathrm{sr}$

$$E=\frac{3\cdot 1600\,\mathrm{lm}}{4\pi\cdot\mathrm{m}^2}\left(\frac{1}{3{,}5^2}+\frac{1}{4^2+3{,}5^2}\cdot\frac{3{,}5}{\sqrt{4^2+3{,}5^2}}\right)=\underline{40\,\mathrm{lx}.}$$



25.6. $\dfrac{60\,\mathrm{cd}\cdot\mathrm{sr}}{r^2}=0{,}26\,\mathrm{lx} \Rightarrow \underline{r=15\,\mathrm{m}.}$

25.8. Kondensorilinssiin tuleva valovirta ilman heijastinta

$$\Phi_0=\frac{\Phi_{\mathrm{tot}}}{4\pi r^2}\cdot A,$$

jossa r = kondensorilinssin säde ja A = pallokalotin pinta-ala. Heijastin kaksinkertaistaa valovirran ja häviöitä on 10 %, joten valovirta on

$$\Phi=0{,}9\cdot 2\cdot\Phi_0=\frac{0{,}9\cdot 2\cdot\Phi_{\mathrm{tot}}\cdot 2\pi r h}{4\pi r^2}=0{,}9\cdot\frac{\Phi_{\mathrm{tot}}\,h}{r}.$$

Esine etäisyys a saadaan kuvausyhtälöstä (24-9)

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{8{,}0\,\mathrm{m}}=\frac{1}{0{,}25\,\mathrm{m}} \Rightarrow a=0{,}258\,\mathrm{m}$$

Valaistun pinnan säde R varjostimella saadaan kuvan 25-12 yhdenmuotoisista kolmioista (Huom. Kuvan mittasuhteet eivät ole oikeita).

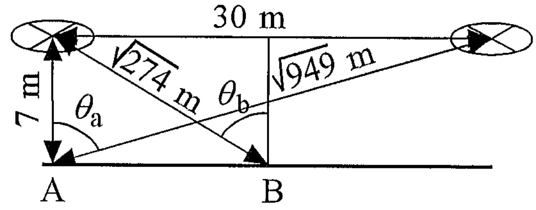
$$\frac{R}{8\,\mathrm{m}}=\frac{0{,}05\,\mathrm{m}}{0{,}258\,\mathrm{m}} \Rightarrow R=1{,}55\,\mathrm{m}.$$

Valaistusvoimakkuus on

$$E=\frac{0{,}9\cdot\Phi_{\mathrm{tot}}\cdot h}{r\cdot\pi R^2}=\frac{0{,}9\cdot 3000\,\mathrm{lm}\cdot 0{,}01\,\mathrm{m}}{0{,}13\,\mathrm{m}\cdot\pi\cdot 1{,}55^2\,\mathrm{m}^2}=\underline{28\,\mathrm{lx}.}$$

25.10. Viereisestä kuvasta saadaan kulmat

$$\theta_a = \arctan\frac{30}{7} = 77° \text{ ja } \theta_b = \arctan\frac{15}{7} = 65°.$$



Kirjan kuvasta 25-6 luetaan valovoimat
$I_0 = 210\,\text{cd}$, $I_{65} = 300\,\text{cd}$ ja $I_{77} = 100\,\text{cd}$.

Kaavan (25-11) mukaisesti

$$E_A = \frac{210\,\text{cd}}{7^2\,\text{m}^2}\text{sr} + \frac{100\,\text{cd}}{949\,\text{m}^2}\cos 77° \cdot \text{sr} = \underline{4{,}3\,\text{lx}}.$$

$$E_B = 2 \cdot \frac{300\,\text{cd}}{274\,\text{m}^2}\cos 65° \cdot \text{sr} = \underline{0{,}93\,\text{lx}}.$$

Kuvan 25-6 lukemistarkkuudessa voi olla eroja ± 20 cd.

Luku 26

26.2. $N \cdot \frac{hc}{\lambda} = 0{,}02 \cdot 100\,\text{J} \Rightarrow N = \frac{589 \cdot 10^{-9}\,\text{m} \cdot 2\,\text{J}}{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\text{Js} \cdot 3 \cdot 10^8\,\text{m}} = \underline{5{,}9 \cdot 10^{18}}.$

26.4. $E = Pt = 2{,}0 \cdot 10^6\,\text{W} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{s} = \underline{2{,}0\,\text{kJ}}.$

$$p = \frac{E}{c} = \underline{6{,}7 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{kg m}}{\text{s}}}.$$

26.6. Sijoittamalla $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ yhtälöön (26-4) saadaan muoto $w_\lambda = \text{vakio} \cdot \frac{x^5}{e^x - 1}$.

Derivoidaan tämä x:n suhteen ja maksimissa tai minimissä derivaatta on nolla. Tässä tapauksessa osoittajan pitää olla nolla.

$$\frac{dw_\lambda}{dx} = \text{vakio} \cdot \left[5x^4\left(e^x - 1\right) - x^5 e^x\right] = 0$$

$5 \cdot e^x - 5 - x \cdot e^x = 0 \Rightarrow e^{-x} + \frac{1}{5}x - 1 = 0$. Sen ratkaisu on $x \approx 4{,}9651$. Nyt saadaan

$$\lambda_{\max} \cdot T = \frac{hc}{kx} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{Js} \cdot 3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{1{,}381 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K} \cdot 4{,}97} \approx \underline{2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \cdot \text{K}}.$$

26.8. $E_k = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \cdot 1{,}3807 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 293\,\text{K} = \underline{6{,}07 \cdot 10^{-21}\,\text{J} = 0{,}038\,\text{eV}}.$

$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = 2{,}69 \cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Silloin $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\text{Js}}{1{,}675 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot 2{,}69 \cdot 10^3\,\text{m/s}} = \underline{0{,}15\,\text{nm}}.$

26.10. $\left.\begin{matrix} E = mc^2 \\ p = mv \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{E}{p} = \dfrac{c^2}{v} \Rightarrow \underline{vE = pc^2}. \Rightarrow \dfrac{v}{c} = \dfrac{pc}{E}$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1-\frac{p^2 c^2}{E^2}} \Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$$\Rightarrow \underline{E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

— — — — — — — — — — — —

26.12. a) $W_0 = \frac{hc}{\lambda} - 3{,}0\ \text{eV} = \underline{5{,}3\,\text{eV}}$. b) $\lambda_0 = \frac{hc}{W_0} = \underline{235\,\text{nm}}$. c) $U_p = \frac{E_{k,\max}}{e} = \underline{3{,}0\,\text{V}}$.

— — — — — — — — — — — —

26.14. a) $\Delta\lambda_{\max}$ on, kun $\theta = 180°$. Silloin

b) (26-16) antaa $\Delta\lambda_{\max} = \dfrac{h}{m_e c} \cdot 2 = \dfrac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \frac{\text{kg}\,\text{m}^2}{\text{s}} \cdot 2}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 4{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$

Elektronin kineettisen energian maksimi on siten

$$E_{k,\max} = hc\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}\right) = 4{,}1357 \cdot 10^{-15}\ \text{eVs} \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16{,}85}\right)\frac{\text{m}}{10^{-12}} = \underline{30\,\text{keV}}.$$

— — — — — — — — — — — —

26.16. Taulukosta 26.2 saadaan matkavaimennuskertoimien μ arvot, jotka sijoitetaan vuorotellen (26-26):een ja $100 \cdot \frac{J}{J_0} = 100 \cdot e^{-\mu x}$.

E_γ /MeV	0,10	1,0	10
μ / m^{-1}	5980	77,2	56,8
$100 \cdot \frac{J}{J_0}$	$1{,}6 \cdot 10^{-6}$	79	84

— — — — — — — — — — — —

26.18. $\mu_m = \mu / \rho$. μ-arvot saadaan taulukosta 26.2 ja tiheydet ovat 11350 kg/m^3, 2700 kg/m^3 ja 1000 kg/m^3.

E_γ /MeV	0,10	1,0	10
$\mu_{m,\text{Pb}}$ /(10^{-3} m^2/kg)	530	6,8	5,6
$\mu_{m,\text{Al}}$ /(10^{-3} m^2/kg)	16	6,1	2,3
$\mu_{m,\text{vesi}}$ /(10^{-3} m^2/kg)	17	7,6	2,2

Huomataan, että massaheikennyskertoimen arvo (lyijyä lukuunottamatta) on suunnilleen aineesta riippumaton, mutta on fotonin energiasta riippuva.

— — — — — — — — — — — —

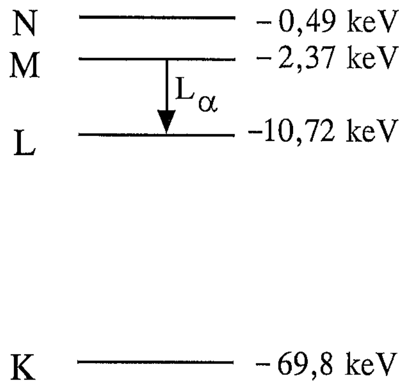
26.20. Kaava (26-21) ja elektroni on nostettava ensin radalta $n = 1$ radalle $n = 4$.

$$\Delta E = -13{,}6\,\text{eV}\cdot\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{1^2}\right) = \underline{12{,}7\,\text{eV}.}$$

— — — — — — — — — — —

26.22. K-viivojen aallonpituuksia vastaavista energioista

$\Delta E = \dfrac{hc}{\lambda}$ saadaan tasojen L, M ja N energiat:



L-taso:

$$-69{,}8\,\text{keV} + \frac{4{,}136\cdot 10^{-18}\ \text{keVs}\cdot 3\cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{0{,}0210\cdot 10^{-9}\ \text{m}} = -10{,}72\,\text{keV}.$$

Vastaavasti M-taso – 2,37 keV ja N-taso – 0,49 keV.

L_α - viivan energia on (10,72 – 2,27) keV ja aallonpituus

$$\lambda = \frac{4{,}136\cdot 10^{-18}\ \text{keVs}\cdot 3\cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{8{,}35\,\text{keV}} = \underline{0{,}149\,\text{nm}.}$$

— — — — — — — — — — —

26.24. Jännitteestä 30 kV saadaan kaavan (26-33) mukaisesti aallonpituuden minimiksi

$\lambda_{\min} = \dfrac{hc}{Ue} = 41\,\text{pm}$. Heijastuvat aallonpituudet antaa yhtälö (26-24) $\lambda = \dfrac{2\cdot 201\,\text{pm}\cdot\sin 15°}{n}$.

$n = 1 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 104\,\text{pm}}$, $n = 2 \Rightarrow \underline{\lambda_2 = 52\,\text{pm}}$, $n = 3 \Rightarrow \lambda_3 = 35\,\text{pm}$. Viimeistä aallonpituutta ei esiinny tulevassa säteilyssä.

— — — — — — — — — — —

26.26. Yksi happimolekyyli tarvitsee jakautuakseen energian

$$E_1 = 247\frac{10^6\ \text{J}}{10^3\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\ \text{kpl}} = 0{,}410\cdot 10^{-18}\ \text{J}.$$

Tätä energiaa vastaa aallonpituus $\lambda_{\max} = \dfrac{hc}{E_1} = \underline{484\,\text{nm}.}$

Auringon säteily sisältää myös tätä ja tätä lyhyempiä aallonpituuksia, joten ilmassa tapahtuu jakautumista atomaariseksi hapeksi.

— — — — — — — — — — —

Luku 27

27.2. Sijoitetaan annetut arvot kaavaan (27-4 ja 5)

$160{,}65\,\text{MeV} = (10 \cdot 1{,}007825 + 10 \cdot 1{,}008665 - \text{X}) \cdot 931{,}5\,\text{MeV}$

$\Rightarrow \text{X} = 19{,}992\,436.\quad \text{Tulos}: 19{,}992\,436\,u.$

— — — — — — — — — — —

27.4. Sijoitus kaavaan (27-9) ja (27-8)

$$\frac{A_0}{10} = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 8\,\text{min}} \Rightarrow \lambda = 0{,}288\,\text{min} \approx \underline{4{,}8 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{s}}}. \quad T_{½} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \underline{2{,}4\,\text{min}}.$$

— — — — — — — — — — —

27.6. Merkitään nykyinen isotooppien yhteismassa = m, jolloin osamassat ovat $0{,}007m$ ja $0{,}993m$. Kaavasta (27-7) saadaan alkuperäinen ytimien lukumäärä $N_0 = N e^{\frac{\ln 2}{T_{½}} \cdot T}$.

a) $5 \cdot 10^9$ a sitten

$$m_{235} = 0{,}007\,m \cdot e^{\frac{\ln 2}{0{,}7} \cdot 5} = 0{,}989\,m.$$

$$m_{238} = 0{,}993\,m \cdot e^{\frac{\ln 2}{4{,}5} \cdot 5} = 2{,}145\,m$$

jolloin 235:n osuus $\dfrac{0{,}989}{0{,}989 + 2{,}145} = \underline{32\,\%}.$

b) $10 \cdot 10^9$ a sitten

$$m_{235} = 0{,}007\,m \cdot e^{\frac{\ln 2}{0{,}7} \cdot 10} = 139{,}8\,m$$

$$m_{238} = 0{,}993\,m \cdot e^{\frac{\ln 2}{4{,}5} \cdot 10} = 4{,}63\,m$$

jolloin 235:n osuus $\dfrac{139{,}8}{139{,}8 + 4{,}63} = \underline{97\,\%}.$

c) Isotooppeja ollut yhtä paljon $t \cdot 10^9$ a sitten, joten

$$0{,}007\,m \cdot e^{\frac{\ln 2}{0{,}7} \cdot t} = 0{,}993\,m \cdot e^{\frac{\ln 2}{4{,}5} \cdot t} \Rightarrow t = 5{,}9 \text{ ja tulos } \underline{5{,}9 \cdot 10^9\text{ a}}.$$

— — — — — — — — — — —

27.8. a) $A = \lambda N = \dfrac{\ln 2}{T_{½}} \cdot \dfrac{m}{A_{\text{Am}} \cdot \text{u}}$

$$m = A A_{\text{Am}}\,\text{u} \frac{T_{½}}{\ln 2} = 30 \cdot 10^3\,\frac{1}{\text{s}} \cdot 241 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot \frac{432 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s}}{\ln 2} \approx \underline{0{,}24\,\mu\text{g}}.$$

b) $20\,\text{kBq} = 30\,\text{kBq} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{432\,\text{a}} \cdot t} \Rightarrow \underline{t = 250\,\text{a}}.$

— — — — — — — — — — —

27.10. Renkaan aktiivisuus 10 d jälkeen ja koko öljymäärän aktiivisuus suhtautuvat kuten renkaan massa ja siitä irronnut massa. Irronneeksi massaksi saadaan

$$m = \frac{\dfrac{5800\,\mathrm{cm}^3}{100\,\mathrm{cm}^3}\cdot 480\,\mathrm{Bq}}{33\cdot 10^3\,\mathrm{Bq}\cdot e^{-\frac{\ln 2}{45\mathrm{d}}\cdot 10\,\mathrm{d}}}\cdot 25\,\mathrm{g} = \underline{25\,\mathrm{mg}}.$$

— — — — — — — — — — — —

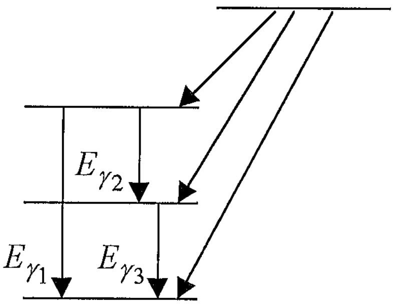
27.12. ${}^{239}_{93}\mathrm{Np} \to {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + {}^{239}_{93}\mathrm{Np} \to {}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{4}_{2}\mathrm{X}$

Varaus 2 ja massa 4 vastaavat He-ydintä eli tulos on $\underline{\alpha\text{-hiukkanen}}$.

— — — — — — — — — — — —

27.14.

$$E_{\gamma_1} = (4{,}78 - 4{,}34)\,\mathrm{MeV} = \underline{0{,}44\,\mathrm{MeV}}$$
$$E_{\gamma_2} = (4{,}59 - 4{,}34)\,\mathrm{MeV} = \underline{0{,}25\,\mathrm{MeV}}$$
$$E_{\gamma_3} = (0{,}44 - 0{,}25)\,\mathrm{MeV} = \underline{0{,}19\,\mathrm{MeV}}$$



— — — — — — — — — — — —

27.16. a) ${}^{232}_{92}\mathrm{U} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{228}_{90}\mathrm{Th}$

b) $Q = (232{,}372 - 228{,}0287 - 4{,}002603)\cdot 931{,}49\,\mathrm{MeV} = \underline{5{,}5\,\mathrm{MeV}}.$

c) Reaktioyhtälö olisi ${}^{232}_{92}\mathrm{U} \to {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{231}_{91}\mathrm{Pa}$ ja tämän yhtälön reaktioenergia olisi

$Q = (232{,}372 - 231{,}0359 - 1{,}007270)\cdot 931{,}49\,\mathrm{MeV} = \underline{-5{,}6\,\mathrm{MeV}} \Rightarrow$ <u>ei voi</u>.

— — — — — — — — — — — —

27.18. Kuvasta 27-15 luetaan energiaa $E_\beta = 0{,}765\,\mathrm{MeV}$ vastaavaksi

kantama · tiheys arvoksi ≈ 2,2 kg/m². Silloin kantama $\approx \dfrac{2{,}2\,\mathrm{kg/m^2}}{2700\,\mathrm{kg/m^3}} \approx \underline{0{,}8\,\mathrm{mm}}.$

— — — — — — — — — — — —

27.20. $X = \dfrac{Q}{m} = \dfrac{Ne}{\rho V}$

$$N = \frac{X\rho V}{e} = \frac{2{,}58\cdot 10^{-4}\,\mathrm{As/kg}\cdot 1{,}29\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 1\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{As/pari}} = \underline{2{,}1\cdot 10^9\ \mathrm{paria}}.$$

— — — — — — — — — — — —

27.22. Keuhkoissa olevan ilmamäärän radonaktiivisuus on $\dfrac{3\,\mathrm{dm^3}}{1000\,\mathrm{dm^3}}\cdot 200\,\mathrm{Bq} = 0{,}6\,\mathrm{Bq}.$

$$H = Q\cdot\frac{E_D}{m} = 20\cdot\frac{0{,}6\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\,\mathrm{s}\cdot 5{,}59\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{kg}} \approx \underline{0{,}34\,\mathrm{mSv}}.$$

— — — — — — — — — — — —

27.24. a) $D = \dfrac{E}{m} = \dfrac{AtE_1}{m} = \dfrac{10000\frac{1}{\text{s}} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s} \cdot 1{,}18 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}}{80\,\text{kg}} \approx \underline{0{,}74\,\text{mSv}}.$

b) Ihmisessä on Cs-ytimiä määrä N_0 ja aktiivisuus A_0. Saadaan

$$A_0 = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N_0 = \frac{\ln 2}{T_{½\mathrm{f}}} \cdot N_0 \quad \Rightarrow \quad N_0 = \frac{T_{½\mathrm{f}}}{\ln 2} \cdot A_0$$

Biologisen puoliintumisajan mukaan päivässä hajoavien ytimien määrä on

$$\mathrm{d}N = \frac{\ln 2}{T_{½\mathrm{b}}} \cdot N_0\,\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{T_{½\mathrm{b}}} \cdot \frac{T_{½\mathrm{f}}}{\ln 2} A_0\,\mathrm{d}t = \frac{T_{½\mathrm{f}}}{T_{½\mathrm{b}}} \cdot A_0\,\mathrm{d}t.$$

Tämä määrä on saatava ravinnon mukana tilalle eli

$$A_{\mathrm{rav}} = \lambda\,\mathrm{d}N = \frac{\ln 2}{T_{½\mathrm{f}}} \cdot \frac{T_{½\mathrm{f}}}{\mathrm{T}_{½\mathrm{b}}} \cdot A_0 \cdot \mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{80\,\mathrm{d}} \cdot 10000\,\mathrm{Bq} \cdot 1\,\mathrm{d} \approx 86{,}6\,\mathrm{Bq}$$

Ravinnon määrä on $m_{\mathrm{rav}} = 86{,}6\,\mathrm{Bq} \cdot \dfrac{1\,\mathrm{kg}}{1000\,\mathrm{Bq}} \approx \underline{87\,\mathrm{g}}.$

27.26. Massaluvuista 24+2=4+<u>22</u>, varausluvuista 12+1=2+<u>11</u>. $\Rightarrow$ ${}^{22}_{11}\mathrm{Na}$

Muista vastaavalla tavalla ${}^{4}_{2}\alpha$, ${}^{2}_{1}\mathrm{d}$ ja ${}^{131}_{53}\mathrm{I}$. Tehtävässä pitäisi olla typpi-13 eikä typpi-14.

27.28. Makrovaikutusalaksi saadaan

$$\Sigma = \sigma n = \sigma \cdot \frac{\rho}{A_{\mathrm{r}}\,\mathrm{u}} = 3{,}8 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{m}^2 \cdot \frac{2{,}3 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m}^3}{10 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} \approx 52{,}7 \cdot 10^3\,\frac{1}{\mathrm{m}}$$

Suihkusta menee läpi 10 % ja kerrospaksuudeksi x saadaan

$$N = N_0\,\mathrm{e}^{-\Sigma x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln \frac{N_0}{N}}{\Sigma} = \frac{\ln 10}{52{,}7 \cdot 10^3\,\frac{1}{\mathrm{m}}} \approx \underline{44\,\mu\mathrm{m}}.$$
