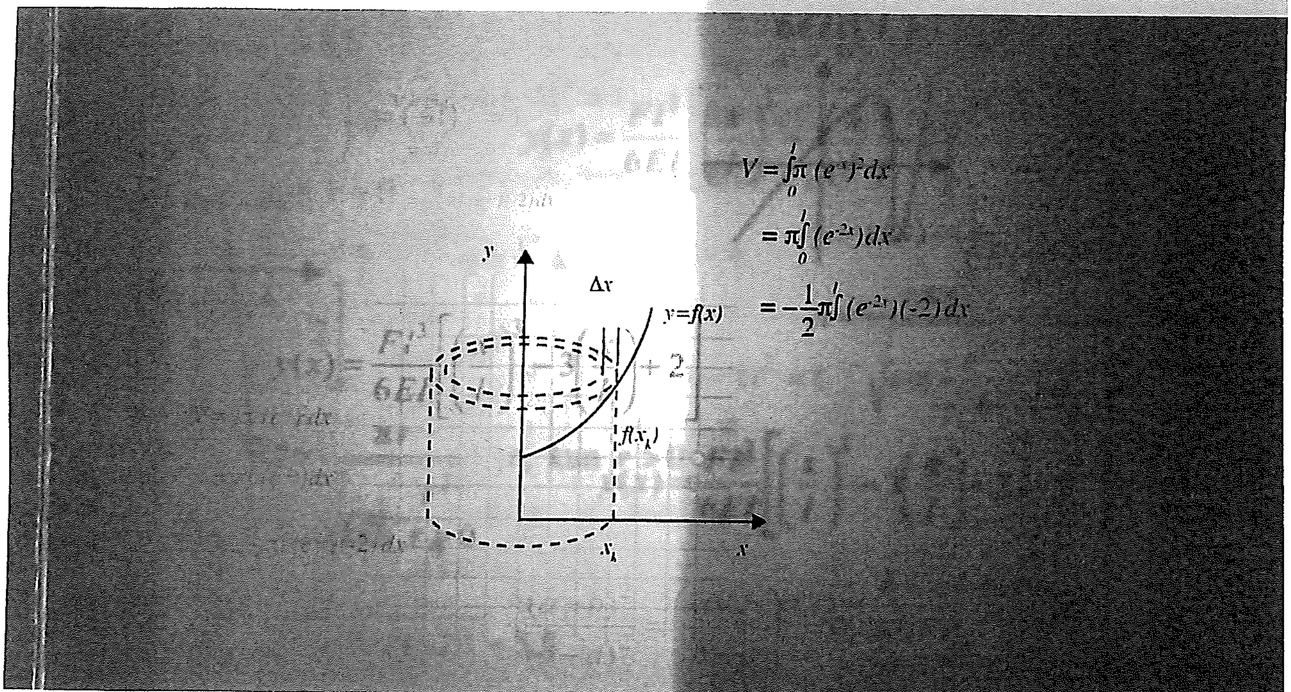
PASI LEHTOLA ANNE RANTAKAULIO

Tekninen matematiikka 2



Tammertekniikka

Anne Rantakaulio Pasi Lehtola

Tekninen matematiikka 2

1. uusittu painos (2013)

Tammertekniikka

YHTEYSTIEDOT

Tilaukset ja tiedustelut
Amk-Kustannus Oy, Tammertekniikka, Tampere
Puh. (050) 585 4930
Fax (03) 2530 306
Sähköposti tilaukset@tammertekniikka.fi

www.tammertekniikka.fi

Kustantaja: Amk-Kustannus Oy, Tammertekniikka
1. uusittu painos, 2013

ISBN 978-952-5491-75-3

Hansaprint Oy,
Direct Vantaa, 2013

KOPIOINTIEHDOT

Alkusanat

Tämä kirja on tehty insinöörikoulutuksen matematiikan opettajille ja opiskelijoille kurssimateriaaliksi. Tarkoituksena on ollut kirjoittaa tiivis esitys keskeisistä differentiaali- ja integraalilaskennan käsitteistä ja niiden soveltamisesta. Kirjan alussa kerrataan funktion käsitettä ja esitellään lyhyesti interpolointia ja regressiota. Raja-arvojen, derivoinnin ja integroinnin lisäksi kirjassa käsitellään jono- ja sarjaoppia sekä tavallisia differentiaaliyhtälöitä.

Insinöörikoulutusta tarjotaan monen erilaisen pohjakoulutuksen saaneille. Koulutuksen tavoitteetkin ovat osittain muuttuneet tuotantopainotteisten ohjelmien myötä. Opetukseen käytettävissä olevia resursseja ei ole tuhlattavaksi asti. Näistä syistä olemme karsineet analyysin kursseilla perinteisesti esitettyä materiaalia ja keskittyneet mielestämme olennaiseen. Kurssin opettaja voi tietysti jättää joitakin kirjan kohtia käsittelemättä tai ottaa mukaan haluamiaan aiheita, joita kirjassa ei ole.

Toisaalta olemme yrittäneet katsoa matematiikan oppimista myös opiskelijan näkökulmasta. Teksti on yritetty kirjoittaa sellaisessa muodossa, jota opiskelija voisi itsenäisestikin seurata. Erilaisia oppijoita ajatellen olemme esitelleet ja syventäneet matematiikan käsitteitä sekä sanallisesti, visuaalisesti, numeerisesti että symbolisesti. Matematiikan kokemista kiinnostavaksi ja hyödylliseksi olemme tukeneet viittaamalla erilaisiin sovelluksiin niin usein kuin mahdollista.

Tietokoneen rooli matematiikan opetuksessa ei ole vielä selkiintynyt. Nykyään voi kaikki mekaaniset derivoinnit ja integroinnit suorittaa symbolista matematiikkaa ymmärtävällä ohjelmalla. Jätämme opettajan harkintaan, missä määrin hän haluaa harjoittaa käsin laskemista symboleilla. Monet harjoitustehtävät on mahdollista ratkaista vain laskinta tai tietokonetta käyttäen. Emme ole tätä tehtävien yhteydessä erikseen korostaneet vaan ajattelemme, että oikean työvälineen valinta on osa insinöörin ammattitaitoa. Mielestämme opetuksessa tulisi korostaa matemaattisten mallien luomista ja ongelmien ratkaisemista.

Olemme uudistaneet joitakin esimerkkejä ja useita harjoitustehtäviä. Kiitämme kommenteista ja otamme niitä mielellämme vastaan jatkossakin.

Jyväskylässä marraskuussa 2012

Pasi Lehtola ja Anne Rantakaulio

pasi.lehtola@jamk.fi ja anne.rantakaulio@jamk.fi

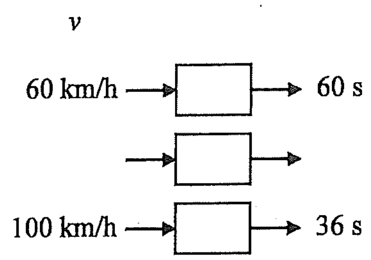
Sisällysluettelo

1 FUNKTIOT

1.1 FUNKTION KÄSITE JA OMINAISUUKSIA

1.1.1 Funktio mustana laatikkona

Esim. 1.1 Alla olevassa kaaviossa on esitetty, kuinka monta sekuntia kuluu tasan yhden kilometrin pituisen matkan ajamiseen kolmella eri nopeudella. Tuloksia voidaan käyttää esimerkiksi auton nopeusmittarin tarkkuuden tarkastamiseen.



Halutaan täydentää kaaviota koskemaan myös nopeuksia 50 km/h, 70 km/h ja 80 km/h. Millä säännöllä matkaan kulunut aika t saadaan ajonopeudesta v?

Kysytty laskutoimitus voidaan ilmaista lauseella "jaa luku 3600 nopeuden lukuarvolla". Symboleita käyttämällä sama sääntö voidaan kirjoittaa muodossa

$$t = \frac{3600}{v}.$$

Yllä esitetty laskusääntö on esimerkki funktiosta. Sana funktio tulee latinasta ja se tarkoittaa toimintoa, tehtävää tai vaikutusta.

Edellisen esimerkin osiin voidaan käyttää myös seuraavia nimityksiä:

syöte	toiminto	tuloste
input	operaatio	output
argumentti	funktio	funktion arvo
riippumaton muuttuja	kuvaus	riippuva muuttuja

Määritelmä Yhden muuttujan reaaliarvoinen **funktio** on sääntö, joka liittää annetut reaaliluvut x toisiin reaalilukuihin y jollakin määrätyllä tavalla. Toisin sanoen, jokaista lukua x kohti on olemassa täsmälleen yksi luku y, jonka arvo riippuu tietyllä tavalla luvun x arvosta. Tämä riippuvuus kirjoitetaan muodossa

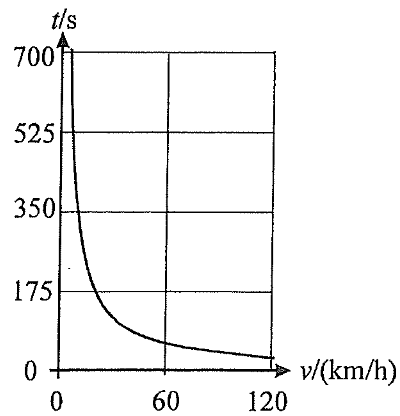
$$y = f(x)$$

ja luetaan "y on x:n funktio" tai lyhyemmin " y on f x". Sanotaan, että x on funktion **argumentti** tai riippumaton muuttuja ja y on **funktion arvo** tai (x:n arvosta) riippuva muuttuja. Huomaa, että f ei ole luku, vaan se on toiminnon symboli tai nimi.

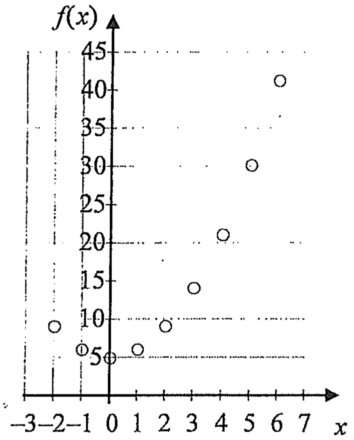
Funktion **määrittelyjoukko** M_f koostuu niistä argumenteista, joilla funktion arvo voidaan laskea. Joskus suurimman mahdollisen määrittelyjoukon sijasta rajoitutaan tarkastelemaan sen jotakin osajoukkoa. Funktion **arvojoukko** A_f nimensä mukaisesti koostuu kaikista funktion saamista arvoista. Sekä määrittely- että arvojoukko ovat siis reaalilukujoukon **R** osajoukkoja.

Funktion **kuvaajan** muodostavat ne tason pisteet (x, y), missä x kuuluu joukkoon M_f ja y on funktion f arvo kohdassa x. Kuvaaja on siis tason osajoukko, jota sanotaan käyräksi. Kaikki käyrät eivät kuitenkaan ole funktioiden kuvaajia.

Jos esimerkin 1.1 funktion määrittelyjoukoksi valitaan väli]0,120], niin sen arvojoukoksi tulee vastaavasti väli [30,∞[. Alla on esimerkkifunktion kuvaaja.



Esim. 1.2 Funktioita voi esittää taulukkona, kuvaajalla tai lausekkeena. Tarkastellaan sanoin ilmaistua matemaattista toimintoa "korota toiseen ja lisää viisi". Funktio voidaan kirjoittaa yhtälönä $f(x)=x^2+5$. Alla oleva taulukko ja kuvaaja esittävät joitakin funktion arvoja.



x	$f(x)$
−2	9
−1	6
0	5
1	6
2	9
3	14
4	21
5	30
6	41

Vakiintuneen tavan mukaan funktiota merkitään yleensä f:llä ja argumenttia x:llä. Niiden sijasta voidaan kuitenkin käyttää mitä hyvänsä symboleja. Esimerkiksi $func(var)=var^2+5$ ja $z(b)=b^2+5$ esittävät samaa toimintoa kuin yllä. Toimenpiteen kohteena voi yksittäisen luvun tai symbolin sijasta olla myös kokonainen lauseke kuten $2a+3b$, jolloin

$$f(2a+3b)=(2a+3b)^2+5.$$

Tärkeimpiä funktioita ovat polynomit, potenssi-, eksponentti- ja logaritmifunktiot sekä trigonometriset funktiot. Lähes kaikki muut funktiot voidaan esittää näiden alkeisfunktioiden avulla. Yleisesti käytettyjä nimityksiä ja esitysmuotoja ovat

- lineaarinen funktio $f(x)=kx$ tai $f(x)=kx+b$
- toisen asteen polynomi $f(x)=ax^2+bx+c$
- yleinen polynomifunktio $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$
- yleinen potenssifunktio $f(x)=a\cdot b^x$
- yleinen eksponenttifunktio $f(x)=ae^{bx}$
- yleinen logaritmifunktio $f(x)=a\ln bx$ tai $f(x)=a\lg bx$
- yleiset trigonometriset funktiot $\begin{cases} f(x)=a\sin(bx+c), \\ g(x)=a\cos(bx+c), \\ h(x)=a\tan bx \end{cases}$

Huomautus Yksiköiden käyttö funktioyhtälöissä

Esimerkissä 1.1 sovittiin, että muuttujan v yksikkö on km/h ja funktion f arvon yksikkö on s. Funktio kirjoitettiin muodossa

$$f(v) = \frac{3600}{v},$$

jolloin esimerkiksi $f(50) = 72$. Jos taas v:n yksiköksi sovitaan m/s, niin funktion lauseke pitäisi kirjoittaa muodossa

$$f(v) = \frac{1000}{v},$$

jolloin $f(50) = 20$. Väärinkäsitysten välttämiseksi on parempi kirjoittaa funktioyhtälö yksiköitä käyttäen muodossa

$$f(v) = \frac{1\,\text{km}}{v},$$

jolloin $f(50\ \text{km/h}) = 72\ \text{s}$ ja $f(50\ \text{m/s}) = 20\ \text{s}$.

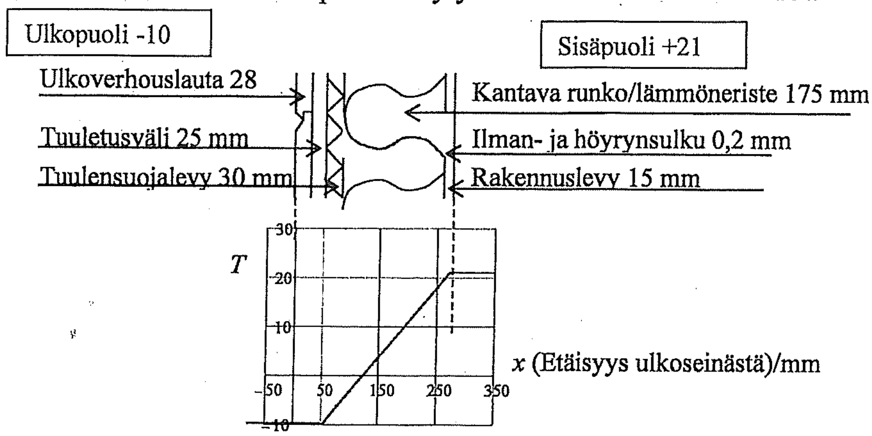
Huomautus Funktion tunnuksista

Funktion tunnuksena käytetään joskus samaa symbolia kuin funktion arvona. Usein kirjoitetaan esimerkiksi $E(v) = \frac{1}{2}mv^2$, kun tarkastellaan liike-energiaa vauhdin funktiona. Täsmällisempi kirjoitustapa olisi kuitenkin seuraava: $E = f(v) = \frac{1}{2}mv^2$.

1.1.1 Paloittain määritelty funktio

Määritelmä Joskus funktion arvo joudutaan muodostamaan eri säännöllä eri väleillä. Tällaisia funktioita sanotaan **paloittain määritellyiksi.**

Esim. 1.3 Alla oleva kuva esittää lämpötilaa höyrynsulullisen seinän rakenteessa.



Lämpötila T voidaan esittää etäisyyden x funktiona lausekkeena

$$T(x) = \begin{cases} -10 & ,\text{kun } x < 53 \\ 0{,}14x\text{-}17{,}42 & ,\text{kun } 53 \le x < 273 \\ 20{,}8 & ,\text{kun } x \ge 273 \end{cases}$$

1.1.2 Kasvavuus ja kuperuus

Määritelmä Välillä $[a, b]$ määritelty funktio f on **kasvava,** jos $f(x_2) \geq f(x_1)$ aina, kun $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

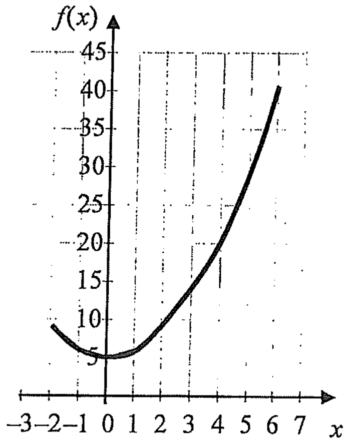
Funktio f on **aidosti kasvava,** jos $f(x_2) > f(x_1)$ aina, kun $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

Vastaavasti määritellään **vähenevä** ja **aidosti vähenevä** funktio.

Ääriarvopisteessä kasvaminen muuttuu vähenemiseksi tai päinvastoin.

Aidosti kasvavan funktion kuvaaja nousee ylöspäin positiivisen x-akselin suuntaan mentäessä. Kasvavan funktion kuvaaja voi olla vaakasuorassakin.

Esim.1.4. Viereinen funktio $f(x)=x^2+5$ vähenee välillä $]-\infty, 0]$ ja kasvaa välillä $[0, \infty[$. Välillä $[-2, 6]$ funktio ei ole kasvava eikä vähenevä. Funktiolla on ääriarvopiste (0,5).



Määritelmä Välillä $[a, b]$ määritelty funktio f on **kupera alaspäin,** jos jokainen kuvaajan kaksi pistettä yhdistävä jänne pysyy kuvaajan yläpuolella. Vastaavasti määritellään ominaisuus **kupera ylöspäin.**

Käännepisteessä funktion kuperuussuunta muuttuu.

Esimerkin 1.4 funktio on kupera alaspäin. Suora ei ole kupera alas- eikä ylöspäin.

1.1.3 Jaksollinen funktio

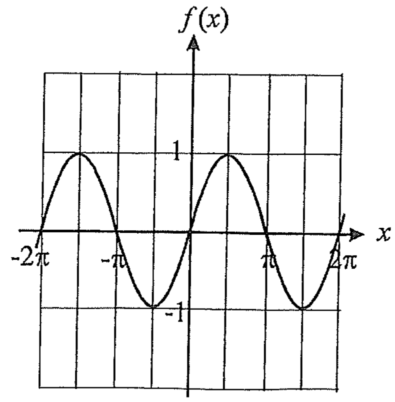
Määritelmä Funktio f on **jaksollinen,** jos on olemassa sellainen positiivinen luku λ, että

$$f(x+\lambda)=f(x)$$

kaikilla x. Lukua λ sanotaan **jaksoksi** tai aallonpituudeksi.

Jaksollisen funktion arvot siis toistuvat aina λ:n välein. Funktion kuvaaja ei muutu, vaikka sitä siirrettäisiin x-akselin suunnassa jakson verran. Jaksolliset funktiot sopivat kuvaamaan aaltoliikettä ja säännöllisiä värähtelyjä.

Esim. 1.5 Sini ja kosini ovat tyypillisiä esimerkkejä jaksollisista funktioista. Viereisen sinikäyrän jakson pituus on 2π, koska $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ kaikilla x.

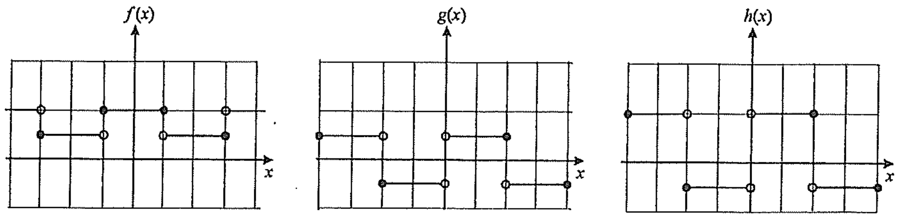


1.1.4 Parillinen ja pariton funktio

Määritelmä **Funktio on parillinen, jos $f(-x)=f(x)$ kaikilla x. Parillisen funktion kuvaaja on symmetrinen y-akselin suhteen.**

Funktio on pariton, jos $f(-x)=-f(x)$ kaikilla x. Parittoman funktion kuvaaja on symmetrinen origon suhteen.

Esim. 1.6 Alla on kolmen kanttiaallon kuvaajat.



Ensimmäinen funktio on parillinen ja toinen pariton. Kolmas funktio ei ole parillinen eikä pariton.

Harjoitustehtäviä

1.1 Funktio f määritellään lausekkeella $f(x)=3x^2$. Määritä

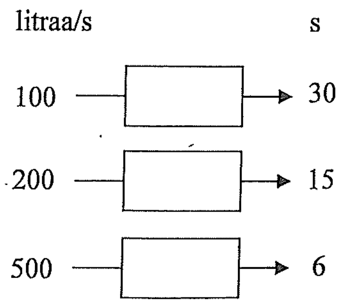
a) $f(-1)$ b) $f(5{,}5\,\text{cm})$ c) $f\left(\sqrt{a^2+1}\right)$.

1.2 Funktio V määritellään lausekkeella $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$. Määritä

a) $V(3)$ b) $V(6{,}366\cdot 10^3\text{km})$ c) $V(R/2+1{,}0\,\text{mm})$.

1.3 Keksi sääntö, joka yhdistää vasemmalla olevat luvut oikealla oleviin.

Nimeä muuttujat ja funktio itse. Mihin käytännön tilanteeseen tehtävä voisi liittyä?



1.4 Piirrä funktion f kuvaaja, kun se määritellään lausekkeella

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2, \text{kun } x\leq 2 \\ 2, \text{kun } 2<x\leq 4 \\ 6-x, \text{kun } x>4. \end{cases}$$

1.5 Piirrä funktion f kuvaaja, kun se määritellään lausekkeella

$$f(x)=\begin{cases} \frac{h}{2}, \text{kun } |x|<h \\ 0, \text{muulloin.} \end{cases}$$

1.6 Piirrä sijainnin $s(t)$ kuvaaja, kun se määritellään lausekkeella

$$s(t)=\begin{cases} 3\,\text{m}, \text{kun } 0\leq t<120\,\text{s} \\ 0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}t-57\,\text{m}, \text{kun } 120\,\text{s}<t<180\,\text{s} \\ 33\,\text{m}, \text{kun } t>180\,\text{s}. \end{cases}$$

1.7 Piirrä tilavuusvirran $q_V(t)$ kuvaaja, kun se määritellään lausekkeella

$$q_V(t)=\begin{cases} 0{,}025\frac{\text{m}^3}{\text{s}^3}t^2, \text{kun } 0\leq t<20\,\text{s} \\ 10\frac{\text{m}^3}{\text{s}}, \text{kun } 20\,\text{s}\leq t<30\,\text{s} \\ -1\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}t+40, \text{kun } 30\,\text{s}\leq t\leq 40\,\text{s}. \end{cases}$$

1.8 Valtion tulovero määräytyi vuonna 2012 alla olevan taulukon mukaan.

Verotettava ansiotulo, euroa	Vero alarajan kohdalla, euroa	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta, %
16 100 – 23 900	8	6,5
23 900 – 39 100	515	17,5
39 100 – 70 300	3 175	21,5
70 300 –	9 883	29,75

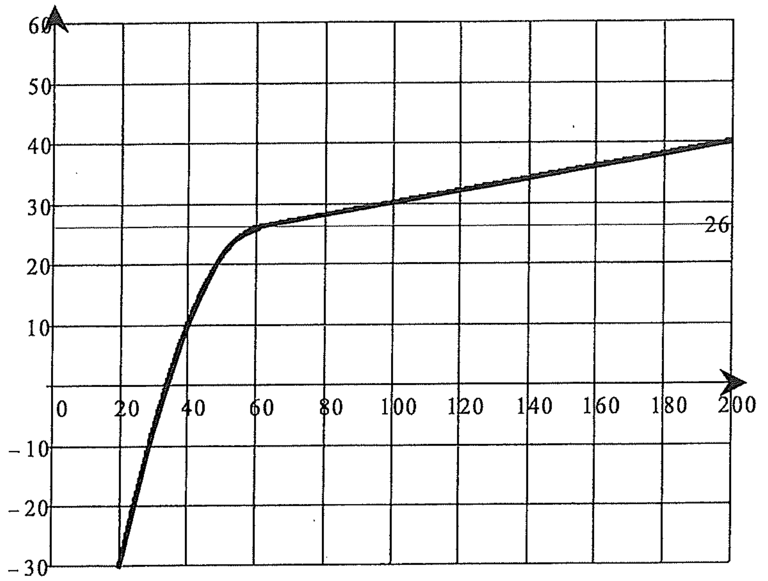
Piirrä tuloveron määrä vuodessa ansiotulojen funktiona. Määritä kuvaajan avulla

a) tuloveron suuruus, kun vuotuinen ansiotulo on 15000 €, 25000 € ja 75000 €

b) se ansiotulo, josta perittävä tulovero on 1000 € ja 10000 €.

1.9 Piirrä lämpötilan kuvaaja hyörynsulullisessa seinässä, kun ulkolämpötila on -30 °C ja sisälämpötila 25 °C. Seinän paksuus ja materiaalit ovat samat kuin esimerkissä 1.3. Määritä, missä kohtaa seinän rakennetta lämpötila on 0 °C.

1.10 Alla oleva kuva esittää hiilidioksidipullon paineen riippuvuuden lämpötilasta. Kirjoita sen funktioyhtälö, kun alkuosa kuvaajasta on paraabeli ja loppuosa suora. Vaaka-akselin paineen yksikkö on bar ja pystyakselin lämpötilan yksikkö on °C. Muista, että yhtälöitä varten tarvitset paraabelilta kolme pistettä ja ja suoralta kaksi pistettä.



1.11 Yhtälö voidaan ratkaista graafisesti piirtämällä yhtälön vasenta puolta vastaavan funktion kuvaaja samaan kuvaan yhtälön oikeaa puolta vastaavan funktion kanssa. Ratkaisuja ovat kuvaajien leikkauspisteet, sillä niissä kohdin funktioiden arvot ovat samat. Ratkaise graafisesti alla olevat yhtälöt.

a) $3-2x=\frac{x}{4}$

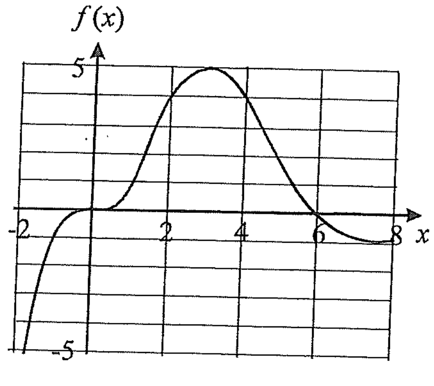
b) $3-x^2=\frac{4}{x}$

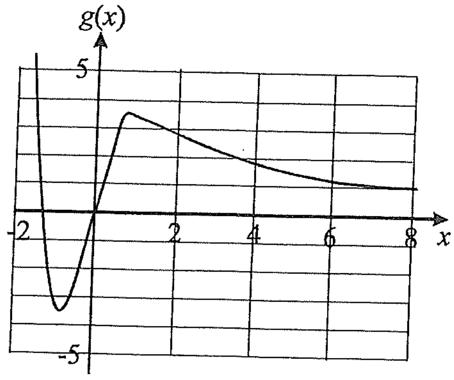
c) $e^{-\frac{x}{3}}=\sqrt{4x}$

d) $(x+1)(x-3)=\ln x$

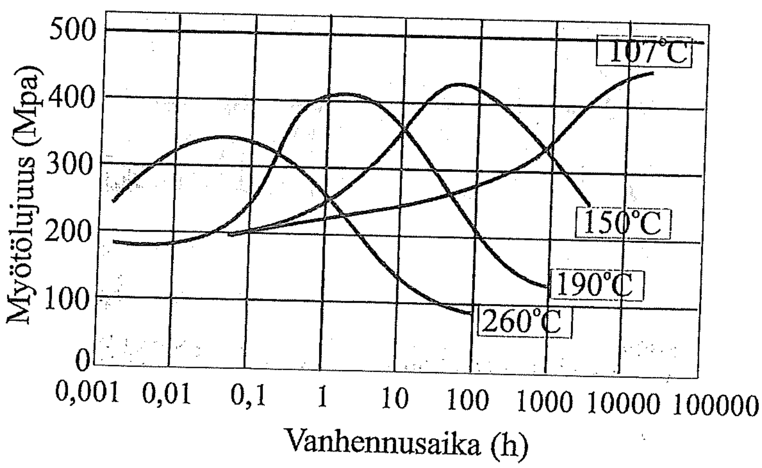
e) $2^x=x^3+1$

1.12 Millä väleillä alla olevat funktiot ovat kasvavia tai väheneviä? Mitkä ovat funktion ääriarvopisteet ja käännepisteet? Millä väleillä ne ovat kuperia alas- tai ylöspäin?





1.13 Alla olevassa kuvassa on erkautumislämpötilan ja ajan vaikutus Al - 4 % Cu seoksen ominaisuuksiin, kun karkaistaan tätä seosta erkaumakarkaisulla. Arvioi kuvasta kunkin käyrän ääriarvopisteet. Ovatko käyrät ylöspäin tai alaspäin kuperia?



1.14 Piirrä sellaisen funktion $y = f(x)$ kuvaaja, joka toteuttaa ehdot

- $f(0) = 100$
- f on kasvava välillä $[0, \infty[$
- f :llä on käännepiste pisteessä (10, 500).

1.15 Piirrä sellaisen muuttujan t funktion h kuvaaja, joka toteuttaa ehdot

- $h(0\text{s}) = 5\text{m}$
- $h(3{,}3\text{s}) = 0\text{m}$
- h:lla on ääriarvopiste (1,5 s; 16 m).

1.16 Millä ehdolla seuraavat funktiot ovat kasvavia?

a) $f(x) = ax + b$

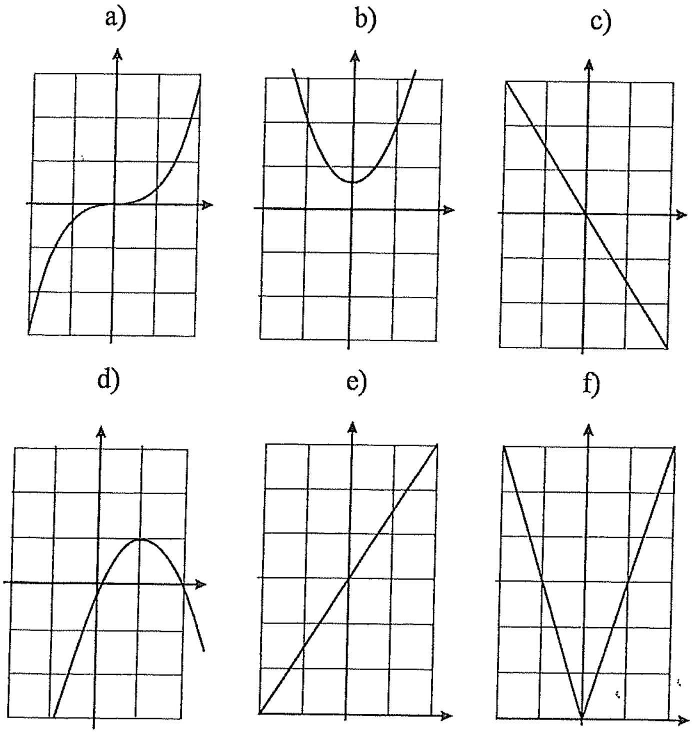
b) $g(x) = ae^{bx}$

c) $h(x) = ax^b$

d) $k(x) = \sin(ax)$

Entä millä ehdolla ne ovat parillisia?

1.17 Mitkä alla olevista funktioista ovat parillisia, mitkä parittomia?



1.18 Tutki seuraavien funktioiden parillisuutta tai parittomuutta:

a) $a(x) = \sin x$ b) $b(x) = \cos x$ c) $c(x) = a(x) + b(x)$ d) $d(x) = a(x)b(x)$.

1.19 Funktio f on määritelty alueella $0 \leq x \leq 1$ yhtälöllä $f(x) = \sqrt{x}$. Piirrä tuon funktion kuvaaja ja jatka kuvaajaa niin, että f on määritelty koko reaaliakselilla ja

a) f on jaksollinen

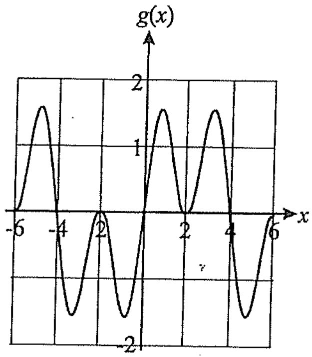
b) f on parillinen

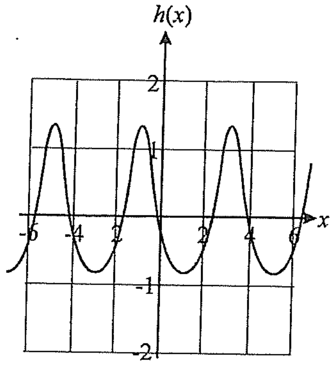
c) f on pariton

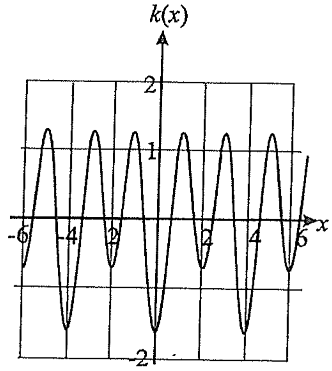
1.20 Mitkä seuraavista funktioista ovat parillisia, mitkä parittomia ja mitkä jaksollisia?

a) $y=(\sin x)^2$ eli $y=\sin^2 x$ b) $y=\sin x^2$ c) $y=\sin^2 x^2$

1.21 Mitkä ovat alla olevien funktioiden jaksojen pituudet?



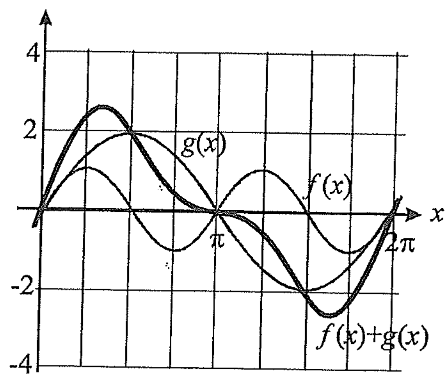




1.2 FUNKTIOIDEN YHDISTÄMINEN

1.2.1 Summa ja tulo

Esim. 1.7 Vieressä olevassa kuvassa on yhdistetty kaksi aaltoliikettä, joita kuvaavat vaalea funktion $f(x)=\sin 2x$ kuvaaja ja tummempi funktion $g(x)=2\sin x$ kuvaaja. Yhtenäinen musta viiva esittää näiden funktioiden f ja g summan kuvaajaa.



Aallot vahvistavat toisiaan niillä väleillä, joilla funktioiden arvot ovat samanmerkkiset (kuten välit [0, π/2] ja [3π/2, 2π]). Väleillä, joilla funktioiden arvot ovat erimerkkiset, aallot heikentävät toisiaan (esimerkiksi väli [π/2, π]).

Määritelmä Kahden funktion f ja g **summa** $f+g$ on funktio, jonka arvot saadaan laskemalla funktioiden f ja g arvot yhteen. Siis $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

Kahden funktion f ja g **tulo** fg on funktio, jonka arvot saadaan kertomalla funktioiden f ja g arvot keskenään. Siis $(fg)(x)=f(x)g(x)$.

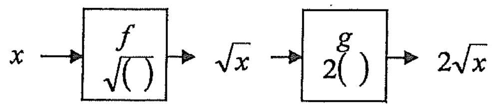
Vastaavalla tavalla määritellään kahden funktion erotus ja osamäärä.

1.2.2 Yhdistetty funktio

Esim. 1.8 Valitse jokin positiivinen luku ja tarkastele seuraavia operaatioita. a) Ota luvusta neliöjuuri ja kerro tulos kahdella. b) Kerro luku kahdella ja ota tulosta neliöjuuri. Kokeile eri luvuilla. Onko operaatioiden järjestyksellä merkitystä? Miten esittäisit operaatiot funktioina?

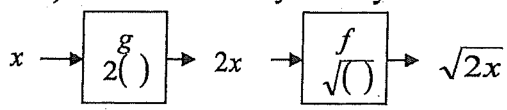
Kyseessä on kaksi funktiota, neliöjuuren ottaminen ja kahdella kertominen. Nimetään ne vaikka f :ksi ja g :ksi. Siis $f(x) = \sqrt{x}$ ja $g(x) = 2x$, jos muuttujana käytetään kirjainta x.

Kohdassa a) on funktiot yhdistetty niin, että g seuraa f :ää.



Yhdistetty funktio on tällöin $g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$.

Kohdassa b) samat funktiot on yhdistetty käänteisessä järjestyksessä.



Nyt saadaan $f(g(x)) = f(2x) = \sqrt{2x}$.

Määritelmä **Kahden funktion f ja g yhdistetty funktio $f \circ g$ on funktio, jonka arvot saadaan laskemalla ensin g :n arvo kohdassa x ja sitten f :n arvo kohdassa $g(x)$. Siis $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Sanotaan, että f on ulkofunktio ja g sisäfunktio.**

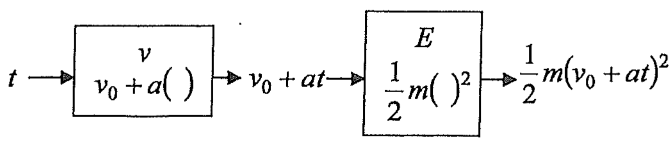
Merkintä $f \circ g$ luetaan "f pallo g".

Kuten edellä huomattiin, on funktioiden järjestys yhdisteessä merkitsevä: yleensä $f \circ g$ ja $g \circ f$ ovat eri funktioita.

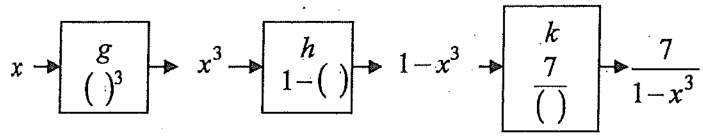
Esim. 1.9 Tarkastellaan tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä olevaa autoa, jonka massa on m ja vauhti v_0 ajan hetkellä $t = 0$. Lausutaan auton kineettinen energia E ajan t funktiona.

Tiedetään, että liike-energia vauhdin funktiona on $E = E(v) = \frac{1}{2}mv^2$. Toisaalta tunnetaan vauhti ajan funktiona muodossa $v = v(t) = v_0 + at$, missä a on vakiokiihtyvyys. Yhdistämällä nämä yhtälöt saadaan $E = \frac{1}{2}m(v_0 + at)^2$.

Kyseessä on funktioiden E ja v yhdiste. Alla oleva kaavio esittää asian.



Esim. 1.10 Funktio $f(x)=\dfrac{7}{1-x^3}$ voidaan esittää alkeellisempien funktioiden yhdisteenä muodossa $f(x)=k(h(g(x)))$, kun valitaan $g(x)=x^3$, $h(x)=1-x$ ja $k(x)=\dfrac{7}{x}$.



Esim. 1.11 Polynomifunktiota $f(x)=x^3-7x$ ei voi esittää alkeellisempien funktioiden yhdistettynä funktiona.

1.2.3 Käänteisfunktio

Määritelmä **Funktion f käänteisfunktio on sellainen funktio f^{-1}, joka kumoaa alkuperäisen funktion vaikutuksen niin, että yhdistetyt funktiot $f^{-1}\circ f$ ja $f\circ f^{-1}$ säilyttävät argumentin ennallaan:**

$$f^{-1}(f(x))=x \text{ ja } f(f^{-1}(y))=y$$

kaikilla $x\in M_f$ ja kaikilla $y\in A_f$.

Matemaattisena toimintona f^{-1} on alkuperäiselle toiminnolle vastakkainen. Jos esimerkiksi

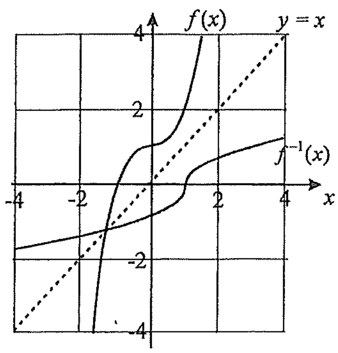
$$f(x)=2x \text{ "kerro kahdella", niin } f^{-1}(x)=\frac{x}{2} \text{ "jaa kahdella".}$$

Muita tällaisia funktio – käänteisfunktiopareja ovat

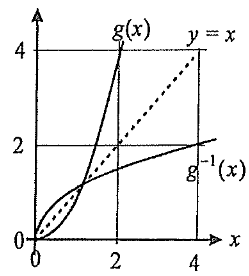
luvun lisääminen	luvun vähentäminen
luvulla kertominen	luvulla jakaminen
potenssiin korotus	juuren ottaminen
eksponenttifunktio	logaritmi
trigonometrinen funktio	arkusfunktio

Käänteisfunktion merkintää ei pidä sekoittaa käänteisluvun eli potenssin -1 merkintään, siis $f^{-1}(x)\neq\dfrac{1}{f(x)}=(f(x))^{-1}$.

Käänteisfunktio on olemassa aina, kun f saa kunkin arvonsa täsmälleen yhden kerran kuten silloin, kun f on aidosti kasvava tai vähenevä. Tällöin käänteisfunktion määrittelyjoukko on $M_{f^{-1}} = A_f$ ja sen arvojoukko $A_{f^{-1}} = M_f$. Lisäksi funktioiden kuvaajat ovat symmetriset suoran $y = x$ suhteen, kuten viereisestä kuvasta nähdään. Viereisessä kuvassa ovat funktiot $f(x) = x^3 + 1$, sen käänteisfunktio $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ja suora $y = x$.



Kaikilla funktioilla ei ole lainkaan käänteisfunktiota. Esimerkiksi funktion $f(x) = x^2$ käänteisfunktio ei ole $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$! Tämä johtuu siitä, että f saa lähes kaikki arvonsa kaksi kertaa, esim. $f(-3) = f(3) = 9$. Jos sen sijaan rajoitetaan funktion f määrittelyjoukkoa siten, että se sisältää vain positiiviset arvot $x \geq 0$, saadaan funktio $g(x) = x^2$, $x \geq 0$, jonka käänteisfunktio on $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.



Esim. 1.12 Potenssifunktiot $f(x) = x^a$ ovat aidosti kasvavia välillä $x > 0$ aina, kun eksponentti $a > 0$. Niille on siis olemassa käänteisfunktio, joka sekin on potenssifunktio, nimittäin $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{a}}$. Samoin eksponenttifunktiot $f(x) = a^x$, missä kantaluku on $a > 0$, ovat aidosti kasvavia koko reaaliakselilla. Niiden käänteisfunktiot ovat logaritmifunktioita $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Esim. 1.13 Määritetään funktion $f(x) = \sqrt{x^3 - 2}$ käänteisfunktio.

Etsitään ensin funktion määrittely- ja arvojoukko. Neliöjuurta ei voi ottaa negatiivisesta luvusta eli on oltava $x^3 - 2 \geq 0$ eli $x \geq \sqrt[3]{2}$. Siis $M_f = [\ \sqrt[3]{2}, \infty[$. Toisaalta $f(x) \geq 0$, joten $A_f = [0, \infty[$.

Tehtävänä on määrittää, millä x:n arvolla funktio saa arvon $y = f(x)$ eli on ratkaistava x yhtälöstä

$$y = \sqrt{x^3 - 2}.$$

Yhtälön ratkaiseminen perustuu siihen, että vaihe vaiheelta kumotaan ne operaatiot, joista alkuperäinen lauseke koostuu. Alla oleva taulukko esittää nämä vaiheet.

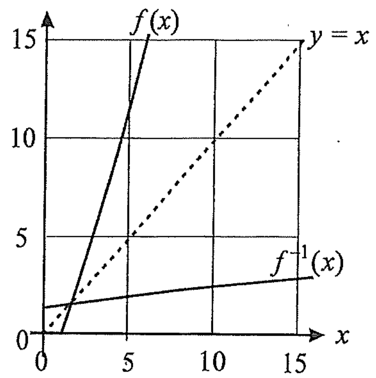
	ulkofunktio	käänteisfunktio	merkintä
$y=\sqrt{x^3-2}$	neliöjuuri	toiseen korotus	$\mid (\ )^2$
$y^2=x^3-2$	luvun vähentäminen	luvun lisääminen	$\mid +2$
$y^2+2=x^3$	kolmanteen korotus	kuutiojuuri	$\mid \sqrt[3]{\ }$
$x=\sqrt[3]{y^2+2}$			

Yhtälönratkaisuna sama näyttää tältä:

$$
\begin{aligned}
& y=\sqrt{x^3-2} && \mid (\ )^2 \\
\Leftrightarrow\ & y^2=x^3-2 && \mid +2 \\
\Leftrightarrow\ & x^3=y^2+2 && \mid \sqrt[3]{\ } \\
\Leftrightarrow\ & x=\sqrt[3]{y^2+2}.
\end{aligned}
$$

Siis $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y^2+2}$. Voidaan myös kirjoittaa $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2+2}$, koska argumentin symboli voidaan valita vapaasti.

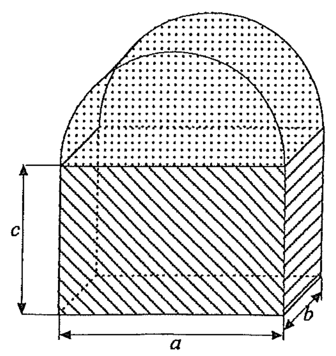
Viereiseen kuvaan on piirretty funktiot f ja f^{-1}. Koska $M_f=[\,\sqrt[3]{2},\infty[$ ja $A_f=[0,\infty[$, niin silloin $M_{f^{-1}}=[0,\infty[$ ja $A_{f^{-1}}=[\,\sqrt[3]{2},\infty[$.



Esim. 1.14 Lasten tavaroiden säilytysarkku koostuu suorakulmaisesta laatikosta, jonka korkeus on $c=3{,}0\,\text{dm}$ ja pohjan leveys on $b=4{,}0\,\text{dm}$. Laatikon kansi on poikkileikkaukseltaan puoliympyrä. Esitetään arkun tilavuus V pohjan pituuden a funktiona ja määritetään tämän funktion käänteisfunktio.
Arkun tilavuus V litroina on

$$V=f(a)=abc+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 b\ =12a+\frac{1}{2}\pi a^2.$$

Tämän funktion määrittelyjoukoksi on valittava positiiviset reaaliluvut.



Käänteisfunktio $a = f^{-1}(V)$ saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$12a+\frac{1}{2}\pi a^2 = V \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}a^2+12a-V=0.$$

Yhtälön ratkaisuista

$$a=\frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(-V)}}{2\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{-12\pm\sqrt{144+2\pi V}}{\pi}$$

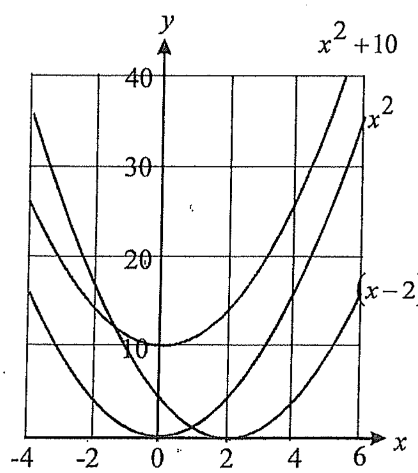
vain toinen on positiivinen. Kun tilavuus V tiedetään, suure a saadaan funktiolla

$$a=f^{-1}(V)=\frac{-12+\sqrt{144+2\pi V}}{\pi}.$$

1.2.4 Kuvaajien siirto ja venytys

Määritelmä **Funktiota $s(x)=x+a$, joka lisää muuttujaan x vakion $a\neq 0$, sanotaan siirroksi ja funktiota $v(x)=ax$, joka kertoo muuttujan x vakiolla $a\neq 0$ sanotaan venytykseksi**

Esim.1.15 Paraabelia $y=x^2$ siirretään a) kaksi yksikköä positiivisen x-akselin suunnassa b) kymmenen yksikköä positiivisen y-akselin suunnassa viereisen kuvan tapaan. Minkä funktioiden kuvaajia näin siirretyt käyrät ovat?



Tapauksessa a) voidaan ajatella operaatioita "siirrä 2 askelta oikealle" ja "korota toiseen". Näitä toimintoja vastaavat funktiot ovat $s(x)=x-2$ ja $f(x)=x^2$. Kun ne yhdistetään oikeassa järjestyksessä, saadaan yhdistetty funktio

$$f(s(x))=f(x-2)=(x-2)^2.$$

Kohdassa b) kyseessä olevat funktiot ovat $f(x)=x^2$ ja $s(x)=x+10$. Haluttuun tulokseen pääsemiseksi ne pitää yhdistää järjestyksessä "korota toiseen" ja "siirrä 10 askelta ylöspäin". Tuloksena saadaan

$$s(f(x))=s(x^2)=x^2+10.$$

Huomautus Funktion $y=f(x)+a$ kuvaaja saadaan funktion $y=f(x)$ kuvaajasta siirtämällä tätä a yksikköä ylöspäin, kun $a>0$ ja alaspäin, kun $a<0$. Vastaavasti funktion $y=f(x+a)$ kuvaaja saadaan funktion $y=f(x)$ kuvaajasta siirtämällä tätä a yksikköä oikealle, kun $a<0$ ja vasemmalle, kun $a>0$.

Sähkötekniikassa ja signaalinkäsittelyssä puhutaan tässä yhteydessä kahden käyrän välisestä vaihe-erosta.

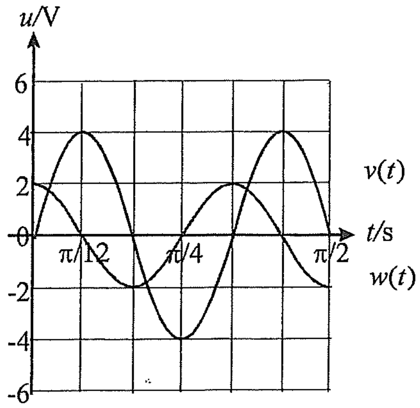
Esim. 1.16 Jännitteen vaihtelua kuvaavien sinikäyrien $u(t)=\hat{u}\sin(\omega t)$ ja $v(t)=\hat{v}\sin(\omega t+\varphi)$ välinen ajallinen vaihe-ero on $\delta=\frac{\varphi}{\omega}$, sillä jälkimmäisen käyrän yhtälössä oleva sisäfunktio voidaan kirjoittaa muodossa $\omega t+\varphi=\omega\left(t+\frac{\varphi}{\omega}\right)$, jossa esiintyy siirto määrällä φ/ω. Jos ω ja $\varphi>0$, on siirto positiivinen ja jälkimmäinen käyrä edellisen vasemmalla puolella. Tarkemmin sanoen, jännite v on $\frac{\varphi}{\omega}$ ajan yksikköä *jäljessä* jännitettä u. Funktioiden

$$v(t)=4\mathrm{V}\sin\left(\frac{6}{\mathrm{s}}t\right) \text{ ja}$$

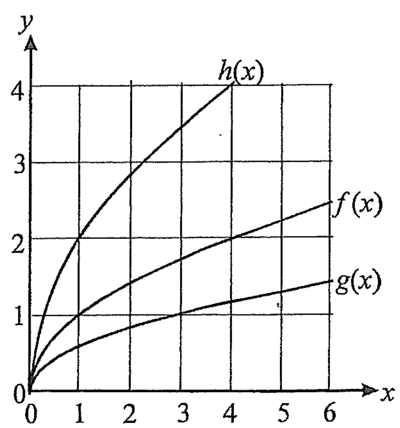
$$w(t)=2\mathrm{V}\sin\left(\frac{6}{\mathrm{s}}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

kuvaajat ovat viereisessä kuvassa. Vaihe-ero on siis

$\delta=\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi\cdot\mathrm{s}}{2\cdot 6}=\frac{\pi}{12}\mathrm{s}$ eli jännite w on $\frac{\pi}{12}\mathrm{s}$ jäljessä jännitettä v, kuten myös kuvaajista nähdään.



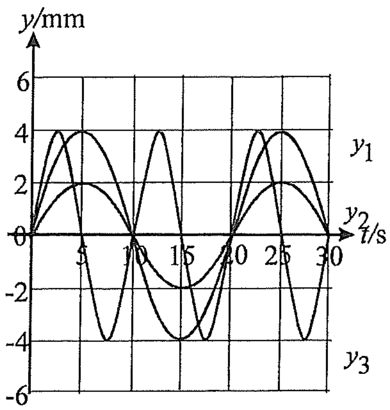
Esim. 1.17 Funktion $f(x)=\sqrt{x}$ arvojen kaksinkertaistaminen vastaa tilannetta, jossa f on sisäfunktiona venytyksessä $v(x)=2x$, sillä $v(f(x))=2f(x)=2\sqrt{x}=h(x)$. Geometrisesti tulkittuna kyseessä on paraabelin $y=\sqrt{x}$ venyttäminen positiivisen y-akselin suunnassa kaksinkertaiseksi niin, että origo pysyy paikallaan. Tällöin sen yhtälö venymättömässä koordinaatistossa on $h(x)=2\sqrt{x}$.



Jos sen sijaan halutaan venyttää paraabelia $y=\sqrt{x}$ kolminkertaiseksi positiivisen x-akselin suunnassa, on sen yhtälö kirjoitettava muotoon $y=\sqrt{\frac{x}{3}}$. Tässä pitääkin jakaa luvulla 3, ei kertoa. Yhdistämällä funktiot $f(x)=\sqrt{x}$ ja $v(x)=\frac{1}{3}x$ saadaan $y=f(v(x))=f\left(\frac{1}{3}x\right)=\sqrt{\frac{1}{3}x}=g(x)$.

Yhdistetty funktio g saa esimerkiksi vasta kohdassa $x=3$ sen arvon, jonka funktio f saa jo kohdassa $x=1$. Siis funktion g kuvaaja saadaan funktion f kuvaajasta venyttämällä tätä x-akselin suunnassa kolminkertaiseksi.

Esim. 1.18 Värähtelyliikkeessä kuvataan poikkeamaa y tasapainoasemasta ajan t funktiona usein sinifunktion $y(t)=A\sin(\omega t)$ avulla. Heilahdusten laajuuden eli amplitudin puolittamiseksi pitää funktion arvot kertoa luvulla $0{,}5$. Heilahdusajan eli jakson pituuden puolittaminen tapahtuu taas kertomalla muuttuja t luvulla 2. Tällöin värähtelyjen nopeus tai taajuus kaksinkertaistuu. Viereisessä kuvassa ovat funktiot $y_1(t)=4\text{mm}\sin\left(\frac{\pi}{10\text{s}}t\right)$, amplitudin puolittava $y_2(t)=2\text{mm}\sin\left(\frac{\pi}{10\text{s}}t\right)$ ja jakson puolittava $y_3(t)=4\text{mm}\sin\left(\frac{\pi}{20\text{s}}t\right)$.



Huomautus Funktion $y=af(x)$ kuvaaja saadaan funktion $y=f(x)$ kuvaajasta venyttämällä tämä a-kertaiseksi niin, että x-akseli pysyy paikallaan. Tapauksessa $a<0$ kuvaaja lisäksi peilautuu x-akselin suhteen. Kun $|a|<1$, voisi venytystä kutsua kutistamiseksi. Vastaavasti funktion $y=f(ax)$ kuvaaja saadaan funktion $y=f(x)$ kuvaajasta joko venyttämällä (kun $|a|<1$) tai kutistamalla (kun $|a|>1$) tätä x-akselin suunnassa kertoimella a pitämällä y-akseli paikoillaan. Tapauksessa $a<0$ kyseessä on lisäksi peilaus y-akselin suhteen.

Harjoitustehtäviä

1.22 Muodosta funktioiden $f(x)=2x$ ja $g(x)=x^2$ summa ja tulo. Piirrä näiden funktioiden sekä niiden summan ja tulon kuvaajat samaan kuvaan.

1.23 Eräs fysikaalinen suure u kasvaa suoraan verrannollisena aikaan t ja toinen suure v vähenee kääntäen verrannollisena aikaan t. Hahmottele näiden funktioiden ja niiden summafunktion kuvaaja. Löytyykö summafunktiolle ääriarvopiste?

1.24 Funktioiden f ja g arvoja on annettu viereisessä taulukossa.

a) Laske yhdistettyjen funktioiden $h=f\circ g$ ja $k=g\circ f$ arvot kohdissa $x=2$ ja $x=4$.

b) Laske erotuksen $d=f-g$ ja osamäärän $q=\dfrac{f}{g}$ arvot kohdissa $x=2$ ja $x=4$.

x	$f(x)$	$g(x)$
1	4	7
2	1	5
3	0	3
4	1	1
5	4	−1

1.25 Täydennä alla oleva taulukko.

funktiot f ja g	summa $f+g$	tulo $f\cdot g$	yhdiste $f\circ g$	yhdiste $g\circ f$
$3x$ ja $5+x$				
x^3 ja $\sqrt{x}$				
e^x ja $-x$				
$\sin x$ ja $2x+\pi$				

1.26 Muodosta yhdistetyt funktiot $f\circ g$ ja $g\circ f$, kun

a) $f(x)=x-1$ ja $g(x)=\sqrt{x}$ b) $f(x)=e^x$ ja $g(x)=2x$.

1.27 Anna esimerkki funktioista f ja g, joille $f\circ g=g\circ f$.

1.28 Minkä alkeellisempien funktioiden yhdiste on $f(x)=x^2+x$?

1.29 Minkä kolmen funktion yhdistettynä funktiona saadaan funktio

a) $u(t)=5\sin^2 t=5(\sin t)^2$ b) $v(t)=5\sin t^2$ c) $s(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

1.30 Kirjoita yhtälönä: Mikä on se luku, jonka luonnollinen logaritmi potenssiin viisi korotettuna ja neljällä kerrottuna antaa tulokseksi luvun kolme? Ratkaise saamasi yhtälö. Etsi vastauksestasi funktio, funktion arvo ja käänteisfunktio.

1.31 Ratkaise yhtälö $3e^{x-1}=45$. Mitä funktioita ja käänteisfunktioita löydät?

1.32 Minkä funktioiden yhdisteitä ovat alla olevat funktiot? Etsi myös niiden käänteisfunktiot silloin, kun se on mahdollista.

a) $f(x)=6+4x^3$, $g(x)=5e^{2x}$, $h(x)=7\ln(4x)$ ja $k(x)=3\sin(x/2)$.

b) $f(x)=\sqrt{43x-5}$, $g(x)=11e^{x-2}$, $h(x)=2\ln(3x+1)$ ja $k(x)=9\sin(\pi-x)$.

1.33 Minkä funktioiden yhdisteitä ovat alla olevat funktiot? Etsi myös niiden käänteisfunktiot silloin, kun se on mahdollista.

a) $f(x)=\frac{1}{5}\left(2x^3-4\right)$ b) $g(x)=\sqrt[3]{3x+4}$ c) $h(x)=-2e^{-5x}$ d) $k(x)=2\sin(3x)$

1.34 Minkä funktioiden yhdisteitä ovat alla olevat funktiot? Etsi käänteisfunktion lauseke silloin, kun se on mahdollista.

a) $s(t)=5\cdot t^2$ b) $T(l)=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ c) $v(t)=4\sin(100t)$ d) $q(t)=3\,e^{-500t}$.

1.35 Pallon tiheys tilavuuden suhteen saadaan funktiolla $\rho(V)=\dfrac{m}{V}$ ja toisaalta pallon tilavuus säteen suhteen funktiolla $V(r)=\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

a) Ilmoita pallon tiheys säteen funktiona. Laske saamallasi funktiolla, kuinka moninkertaiseksi tiheys kasvaa, kun säde puolittuu.

b) Ilmoita pallon säde tiheyden funktiona. Montako prosenttia säde muuttuu, jos tiheys puolittuu?

1.36 Taksimatkan perusmaksu on arkipäivisin 5,50 €. Kuljetustaksa on 1–2 henkilöltä 1,43€/km.

a) Kirjoita taksimatkan hinta kuljetun matkan funktiona. Määritä sen avulla, paljonko tulee maksamaan 10 km:n, 50 km:n tai 120 km:n matka.

b) Määritä hinnan käänteisfunktio. Määritä sen avulla, kuinka pitkälle pääset 100 eurolla, 50 eurolla tai 20 eurolla?

1.37 Kirjoita funktiot, joilla voit laskea kappaleen säteen sen tilavuuden funktiona, kun kappaleen korkeus on 50 cm ja kappale on a) suora ympyrälieriö b) suora ympyräkartio tai c) pallon segmentti.

1.38 Onko totta, että $\sqrt[3]{x^3}=x$ ja $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=x$ kaikilla reaaliluvuilla x? Mitä tulos kertoo funktion $f(x)=x^3$ käänteisfunktiosta?

1.39 Markkinatutkimuksen mukaan erästä tuotetta ostettaisiin 1400 kpl kuukaudessa, jos sen hinta olisi 10 euroa ja 1000 kpl, jos sen hinta olisi 12 euroa. Ilmoita kysyntäfunktio eli hinta P (price) kysynnän Q_D (quantity demanded) funktiona, jos sen arvellaan olevan lineaarinen.

a) Piirrä kysyntäfunktion kuvaaja ja määritä sen avulla, millä hinnalla kysyntä olisi 2000 kpl kuukaudessa.

b) Muodosta käänteisfunktion lauseke ja määritä sen avulla, mikä olisi tuotteen kysyntä 5 euron hinnalla.

c) Hinta P riippuu myös tuotteen tarjonnasta Q_S (quantity supplied). Tiedetään, että kyseistä tuotetta kannattaa valmistaa enintään 1000 kpl, jos valmistaja saa siitä 8 euroa ja 500 kpl, jos hinta jää 5 euroon. Oletetaan funktio lineaariseksi. Piirrä tarjonta- ja kysyntäfunktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon. Määritä kuvan avulla, millä hinnalla kysyntä ja tarjonta ovat yhtä suuret.

1.40 Hahmottele funktioiden $f(x)=x^2-3$, $g(x)=(x+1)^2$ ja $h(x)=(x-14{,}7)^2+25{,}8$ kuvaajat laskematta arvoja.

1.41 Hahmottele funktioiden $f(x)=ax+a$, $g(x)=bx^2-b$, $h(x)=ce^{-cx}$ ja $k(x)=\sqrt{dx+d}$ kuvaajat, kun parametrit a,b,c ja $d>0$.

1.42 Piirrä käyrät $y=\sqrt{x+4}$ ja $y=\sqrt{x}-2$ siirtämällä käyrää $y=\sqrt{x}$.

1.43 Funktion g kuvaaja muodostetaan funktion $f(x)=e^{-x}$ kuvaajasta siirtämällä tätä yhden x-yksikön verran oikealle ja kaksi y-yksikköä ylöspäin. Piirrä funktion g kuvaaja ja määritä sen yhtälö.

1.44 Piirrä funktioiden $y=f(x)$, $y=f(-x)$ ja $y=-f(x)$ kuvaajat, kun $f(x)=e^x$.

1.45 Vahvista seuraavat havainnot jotakin esimerkkifunktiota f tutkimalla:

a) Käyrät $y=f(x)$ ja $y=f(2a-x)$ ovat symmetriset suoran $x=a$ suhteen

b) Käyrät $y=f(x)$ ja $y=2b-f(x)$ ovat symmetriset suoran $y=b$ suhteen

c) Käyrät $y=f(x)$ ja $y=f^{-1}(x)$ ovat symmetriset suoran $y=x$ suhteen

1. FUNKTIOT

1.1. a) 3 b) 90,75 cm^2 c) $3a^2+3$

1.2. a) $36\pi \approx 113{,}1$ b) $1{,}081\cdot 10^{12}\ \text{km}^3$ c) $\dfrac{\pi R^3}{6}+\pi R^2\ \text{mm}+2\pi R\ \text{mm}^2+\dfrac{4\pi}{3}\text{mm}^3$

1.8. a) $k \in Z_+$ b) $R > 0$ c) $-0{,}5\ \text{m} \le d \le 0{,}5\ \text{m}$ tai $d \in [-0{,}5\ \text{m}, 0{,}5\ \text{m}]$

1.11. a) 1,3 b) -2,2 c) 0,2 d) 0,05 ja 3,3 e) -0,7 , 0 , 1 ja 9,9

1.22. $s(x)=2x+x^2\,;t(x)=2x^3$

1.23. Kokeile esimerkiksi funktioilla $u(t)=2t$ ja $v(t)=\dfrac{10}{t}$.

1.24. a) $\begin{matrix} x=2: & h=4, & k=7 \\ x=4: & h=4, & k=7 \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x=2: & d=-4, & q=1/5 \\ x=4: & d=0, & q=1 \end{matrix}$

1.26. a) $f\circ g=\sqrt{x}-1 \quad g\circ f=\sqrt{x-1}$ b) $f\circ g=e^{2x} \quad g\circ f=2e^x$

1.29. a) $u(t)=f\circ g\circ h \quad f(t)=5t,\ g(t)=t^2,\ h(t)=\sin t$

b) $v(t)=f\circ g\circ h \quad f(t)=5t,\ g(t)=\sin t,\ h(t)=t^2$

c) $v(t)=f\circ g\circ h \quad f(t)=e^t,\ g(t)=-\frac{1}{2}t,\ h(t)=t^2$

1.30. $4(\ln x)^5=3$

1.32. a) $f(x)=(a\circ b\circ c)(x) \quad a(x)=6+x,\ b(x)=4x,\ c(x)=x^3; \quad f^{-1}(y)=\sqrt[3]{\dfrac{y-6}{4}}$

$g(x)=(a\circ b\circ c)(x) \quad a(x)=5x,\ b(x)=e^x,\ c(x)=2x;\ g^{-1}(y)=\dfrac{\ln\left(\frac{y}{5}\right)}{2}$ kun $y \ge 0$

$h(x)=(a\circ b\circ c)(x) \quad a(x)=7x,\ b(x)=\ln x,\ c(x)=4x; \quad h^{-1}(y)=\dfrac{e^{\frac{y}{7}}}{4}$

$k(x)=(a\circ b\circ c)(x) \quad a(x)=3x,\ b(x)=\sin x,\ c(x)=\dfrac{x}{2}; \begin{cases} k^{-1}(y)=2\left(\sin^{-1}\left(\frac{y}{3}\right)\right) \\ \text{kun } -3\le y<3 \end{cases}$

b) $f(x)=(a\circ b\circ c)(x) \quad a(x)=\sqrt{x},\ b(x)=x-5,\ c(x)=43x;\ f^{-1}(y)=\dfrac{y^2+5}{43}$

$$g(x)=(a\circ b\circ c)(x)\quad a(x)=11x, b(x)=e^{x}, c(x)=x-2;\begin{cases} g^{-1}(y)=\ln\left(\dfrac{y}{11}\right)+2\\ \text{kun } y\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x)=(a\circ b\circ c\circ d)(x)\quad a(x)=2x, b(x)=\ln x, c(x)=x+1, d(x)=3x;\\ h^{-1}(y)=\dfrac{e^{\frac{y}{2}}-1}{3}\end{cases}$$

$$k(x)=(a\circ b\circ c)(x)\quad a(x)=9x, b(x)=\sin x, c(x)=\pi-x;\begin{cases} k^{-1}(y)=\pi-\sin^{-1}\left(\dfrac{y}{9}\right)\\ \text{kun } -9\leq y\leq 9\end{cases}$$

1.33.

a)

$$f(x)=(a\circ b\circ c\circ d)(x)\qquad a(x)=\frac{1}{5}x, b(x)=x-4, c(x)=2x, d(x)=x^{3}, f^{-1}(y)=\sqrt[3]{\frac{5y+4}{2}}$$

b) $g(l)=(a\circ b\circ c)(x)\quad a(x)=\sqrt[3]{x}, b(x)=x+4, c(x)=3x;\quad g^{-1}(y)=\dfrac{y^{3}-4}{3}$

c) $h(x)=(a\circ b\circ c)(x)\quad a(x)=-2x, b(x)=e^{x}, c(x)=-5x;\begin{cases} h^{-1}(y)=\dfrac{\ln\left(\frac{y}{-2}\right)}{-5}\\ \text{kun } y<0\end{cases}$

d) $k(x)=(a\circ b\circ c)(x)\quad a(x)=2x, b(x)=\sin x,\quad c(x)=3x;\begin{cases} k^{-1}(y)=\dfrac{\sin^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)}{3}\\ \text{kun } -2\leq y<2\end{cases}$

1.34. a) $\begin{cases} s(t)=(a\circ b)(t)\qquad a(t)=\frac{1}{2}gt, b(t)=t^{2};\\ \text{käänteisfunktio } t(s)=\sqrt{\dfrac{2s}{g}},\quad s\geq 0\end{cases}$

b) $\begin{cases} T(l)=(a\circ b\circ c)(l)\quad a(l)=2\pi l, b(l)=\sqrt{l}, c(l)=\dfrac{l}{g};\\ \text{käänteisfunktio } l(T)=g\cdot\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^{2}\end{cases}$

c) $\begin{cases} v(t) = (a \circ b \circ c)(t) \quad a(t) = 4t,\, b(t) = \sin t,\, c(t) = 100t; \\ \text{käänteisfunktio}\; t(v) = \dfrac{1}{100}\sin^{-1}\left(\dfrac{v}{4}\right); \quad -4 \le v \le 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} q(t) = (a \circ b \circ c)(t) \quad a(t) = 3t,\, b(t) = \mathrm{e}^{t}, \quad c(t) = -500t; \\ \text{käänteisfunktio} \quad t(q) = -\dfrac{1}{500}\ln\left(\dfrac{q}{3}\right); \quad q > 0 \end{cases}$

Tekninen matematiikka 2

Itsenäisen työskentelyn osuus on jatkuvasti lisääntynyt koulutuksen eri tasoilla myös matematiikassa.

Tässä oppikirjassa on teorian tueksi esitetty runsaasti käytännön sovellutuksia, jotka motivoivat ja helpottavat omatoimista opiskelua.

Tekninen matematiikka 2 on laadittu siten, että kirja sisältää riittävästi teoriaa ja perustehtäviä ammatillisen pohjakoulutuksen saaneille ja toisaalta kyllin haastavia tehtäviä lukiopohjaisille opiskelijoille.

Koulutuksen rakenteen muuttumisesta huolimatta matemaattis-luonnontieteelliset aineet tulevat aina säilymään tekniikan tärkeänä perustana.

Hyvä matematiikan osaaminen auttaa myöhemmin työelämässä uusien teknisten asioiden ja sovellusten ymmärtämisessä ja omaksumisessa.

Uusittu painos, 2013

ISBN 978-952-5491-75-3

9 789525 491753

K 51

www.tammertekniikka.fi