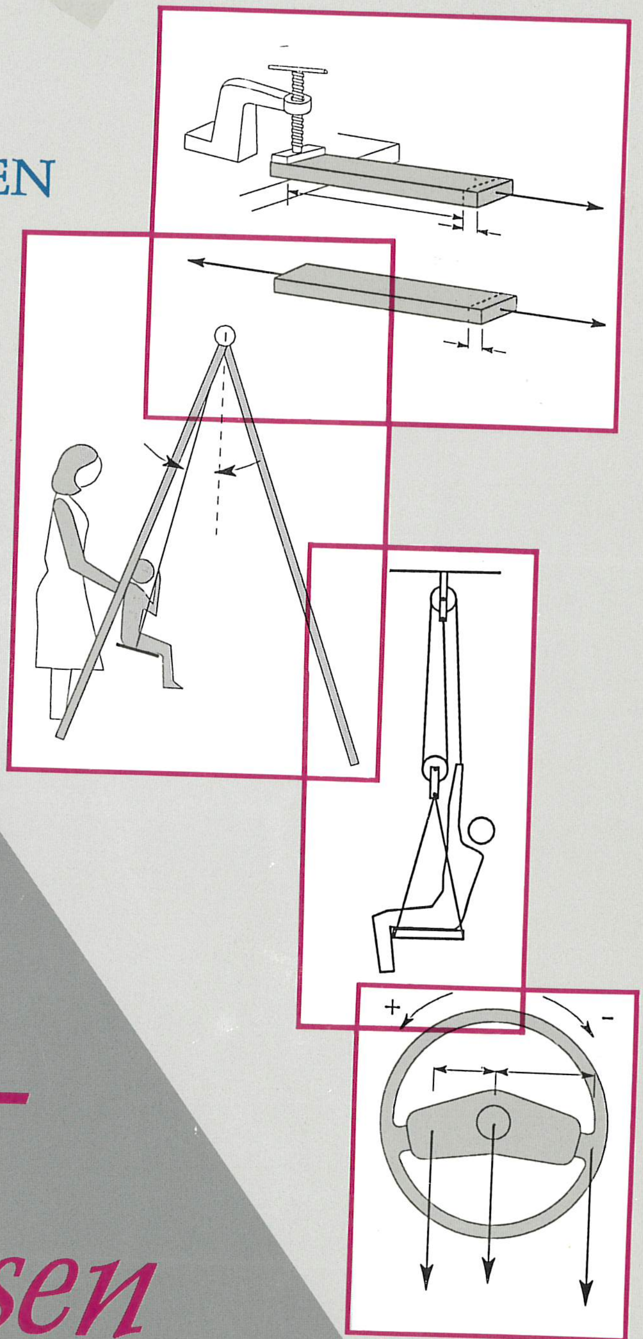
MIKKO MÄKELÄ
RIITTA MÄKELÄ
OLAVI SILTANEN

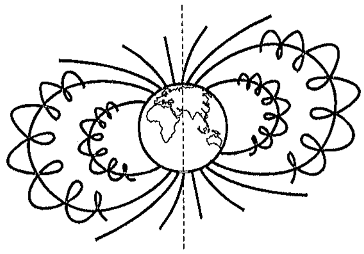


1

Insinöörikoulutuksen FYSIIKKA

Tammertekniikka

PARILLISTEN TEHTÄVIEN RATKAISUT



Kustantaja

Tammertekniikka
Hippoksenkatu 21
33530 Tampere
Puhelin (03) 2611612
Fax (03) 2530306
sähköposti tammertekniikka@tammertekniikka.fi
www.tammerteknikka.fi

ISBN

ISBN 951-9004-79-3

Luku 1

1.2. $d = 70\,\text{mm} = 70 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$. $1\,\text{bar} = 100\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = 1 \cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \Rightarrow \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{1}{10^5}\,\text{bar}$

Sijoitetaan annetut arvot ja saadaan

$$p = \frac{4 \cdot 12000\,\text{N}}{\pi \cdot \left(70 \cdot 10^{-3}\right)^2\,\text{m}^2} = 3{,}12 \cdot 10^6\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 3{,}12 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{10^5}\,\text{bar} = \underline{31\,\text{bar}}.$$

— — — — — — — — — — — —

1.4. $1\,\text{lbf} = 0{,}4536\,\text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4{,}45\,\text{N} \Rightarrow \text{N} = \frac{1}{4{,}45}\,\text{lbf}$

$$1\,\text{in}^2 = \left(2{,}54 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\right)^2 = 0{,}645 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^2 \Rightarrow \text{m}^2 = \frac{1}{0{,}645 \cdot 10^{-3}}\,\text{in}^2$$

Nyt saadaan $2{,}5\,\text{bar} = 2{,}5 \cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 2{,}5 \cdot 10^5\,\frac{1/\,4{,}45}{1/\,(0{,}645 \cdot 10^{-3})} \cdot \frac{\text{lbf}}{\text{in}^2} = \underline{36\,\text{psi}}.$

— — — — — — — — — — — —

1.6. $V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot 2{,}32^3\,\text{m}^3}{3} = 52{,}306\,\text{m}^3 = \underline{52{,}3\,\text{m}^3}.$

— — — — — — — — — — — —

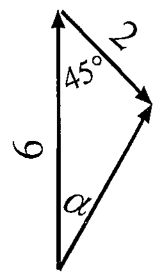
1.8. $\vec{v}_{\text{vene,maa}} = \vec{v}_{\text{vene,vesi}} + \vec{v}_{\text{vesi,maa}}$

Kosinilauseen mukaan

$v_{\text{v,m}} = \sqrt{2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 45°}\,\text{mph} = \underline{4{,}8\,\text{solmu}}.$

Suuntakulma α saadaan sinilauseella $\frac{2}{\sin\alpha} = \frac{4{,}799}{\sin 45°} \Rightarrow \underline{\alpha = 17°}.$

Muunnos $4{,}799\frac{\text{mi}}{\text{h}} = 4{,}799 \cdot \frac{1852\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = \underline{2{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}}.$



— — — — — — — — — — — —

1.10. Kuvan akselijaotuksesta saadaan

$\vec{R} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{K}_1 = -2\vec{i} + \vec{j}$

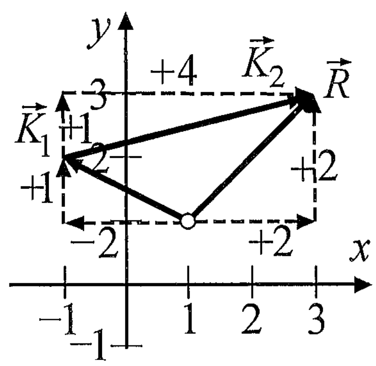
$\vec{K}_2 = \vec{R} - \vec{K}_1 = 4\vec{i} + 2\vec{j}$

Pituudet saadaan yksikkövektoreiden lukuarvojen ja Pythagoraan lauseen perusteella

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$$

$$\left|\vec{K}_1\right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \approx 2{,}2$$

$$\left|\vec{K}_2\right| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}1$$



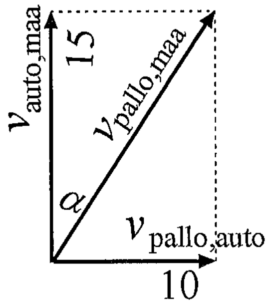
— — — — — — — — — — — —

1.12. Pallon nopeus(vektori) maahan nähden on auton nopeusvektori plus heiton nopeusvektori

$\vec{v}_{\text{pallo,maa}} = \vec{v}_{\text{auto,maa}} + \vec{v}_{\text{pallo,auto}}$

$$54\frac{\text{km}}{\text{h}} = 54 \cdot \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 15\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\left|\vec{v}_{\text{pallo,maa}}\right| = \sqrt{15^2 + 10^2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx \underline{18\frac{\text{m}}{\text{s}}}. \quad \alpha = \text{atn}\frac{10}{15} = \underline{34°}.$$



Luku 2

2.2. Kuljettu matka = keskinopeus· aika

a) $s = v_k t = 75\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 3\text{h} = \underline{225\text{km}}$. b) $s = 75\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 20 \cdot \frac{1}{60}\text{h} = \underline{25\text{km}}$.

— — — — — — — — — — — —

2.4. Yhteen iskuun ja paluuseen kuluu aika

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_1}{v_2} = \frac{0{,}720\text{m}}{12\frac{\text{m}}{\text{min}}} + \frac{0{,}720\text{m}}{24\frac{\text{m}}{\text{min}}} = 0{,}090\,\text{min}$$

$\Rightarrow$ Kokonaisika $35 \cdot 0{,}090\text{min} = 3{,}15\text{min} = \underline{3{,}2\,\text{min}}$

— — — — — — — — — — — —

2.6. $s = v_k t = 300000\frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}20 \cdot 10^{-6}\,\text{s} = \underline{30\,\text{min}}$

— — — — — — — — — — — —

2.8. b) Lasketaan kuljettu matka pinta-alojen avulla:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = v_{k1} \cdot t_1 + v_{k2} \cdot t_2 + v_{k3} \cdot t_3$$
$$= 2\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3\text{s} + 4\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3\text{s} + 2\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 4\text{s} = \underline{26\text{m}}$$

a) $v_k = \frac{s}{t} = \frac{\text{kuljettu matka}}{\text{aika}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t}$

$\Rightarrow v_k = \frac{26\text{m}}{10\text{s}} = 2{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (= keskivauhti)

[keski**nopeus** $v = \underline{0}$]

— — — — — — — — — — — —

2.10. a) $v^2 = v_0^{\,2} + 2as \Rightarrow a = \dfrac{v^2 - v_0^{\,2}}{2s} = \dfrac{(\frac{36}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - (\frac{108}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2\cdot 120\text{m}} = \underline{-3{,}3\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

b) $t = \dfrac{v - v_0}{a} = \dfrac{\frac{36}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} - \frac{108}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-3{,}33\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{6{,}0\text{s}}$

— — — — — — — — — — —

2.12. a) Lausutaan ensin jarrutusmatka alkunopeuden v ja kiihtyvyyden a avulla. Muodostetaan sitten jarrutusmatkojen suhde ja ratkaistaan kysytty uusi jarrutusmatka.

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= 2as \\ \Rightarrow s &= \frac{v^2}{2a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Rightarrow \frac{s_2}{s_1} = \frac{v_2^{\,2}}{2a}\cdot\frac{2a}{v_1^{\,2}} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{s_2}{12\text{m}} = \left(\frac{64\frac{\text{km}}{\text{h}}}{32\frac{\text{km}}{\text{h}}}\right)^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow s_2 = 4\cdot 12\text{m} = \underline{48\text{m}}$$

b) $s_2 = 12\text{m}\cdot 2{,}5^2 = \underline{75\text{m}}$

— — — — — — — — — — —

2.14. a) $y = \dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2y}{g}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 15\text{m}}{9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \underline{1{,}7\text{s}}$

b) $v = gt = \underline{17\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}$

— — — — — — — — — — —

2.16. a) Nousu ja putoaminen ovat nyt identtiset. Laskussa voidaan käyttää putoamisliikkeen kaavoja.

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 40\text{m}}{9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2{,}857\text{s}$$

$$v = gt = \underline{28\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

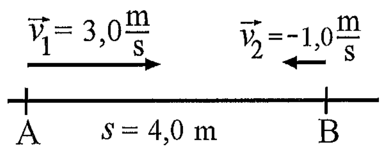
b) Kappaleen asema ja nopeus hetkellä t, kun alkunopeus $v_0 = 28$ m/s:

$$y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 28\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 5\text{s} - \frac{1}{2}\cdot 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot(5\text{s})^2 = \underline{18\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$v = v_0 - gt = \underline{-21\frac{\text{m}}{\text{s}}\downarrow}$$

— — — — — — — — — — —

2.18. $v_1 = 3{,}0\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ $\quad v_2 = -1{,}0\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$ $\quad s = 4{,}0\text{m}$



a) $v_2^{\,2} = v_1^{\,2} + 2as \Rightarrow a = \dfrac{v_2^{\,2} - v_1^{\,2}}{2s} = -1{,}0\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}; |a| = \underline{1{,}0\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

b) $a = \dfrac{v_2 - v_1}{t} \Rightarrow t = \dfrac{v_2 - v_1}{a} = \dfrac{-1\frac{\text{m}}{\text{s}} - 3\frac{\text{m}}{\text{s}}}{-1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{4{,}0\text{s}}$

vaihtoehtoinen ratkaisu: $s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$. $\quad 4{,}0\text{m} = 3{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t^2 \Rightarrow \underline{t = \begin{cases} 2{,}0\text{s} \\ 4{,}0\text{s} \end{cases}}$

Hetkellä $t = 2{,}0$ s kappale on pisteessä B ja nopeus on +1,0 m/s.

c) Aika, joka kuluu siihen, kun kappaleen nopeus on nolla:

$$t_1 = \frac{0 - v_1}{a} = 3{,}0\text{s} \Rightarrow s_1 = \frac{1}{2}|a|t_1^2 = 4{,}5\text{m}$$

vastakkaisen suuntaan on käytettävissä aika

$$t_2 = 2\text{s} \Rightarrow s_2 = \frac{1}{2}|a|t_2^2 = 2{,}0\text{m} \Rightarrow \text{Kokomatka } s = \underline{6{,}5\text{m}}$$

— — — — — — — — — — — —

2.20. a) $a = \text{vakio} \quad t \in (1\ldots3)\mu\text{s}$

$$\Rightarrow a = a_\text{k} = \frac{-20\frac{\text{mm}}{\text{s}} - 20\frac{\text{mm}}{\text{s}}}{3\,\mu\text{s} - 1\,\mu\text{s}} = -20\frac{\text{mm}}{\text{s}\cdot\mu\text{s}} = -20\cdot\frac{10^{-3}\text{m}}{\text{s}\cdot 10^{-6}\text{s}} = \underline{-20\cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

b) $$|\overline{v_\text{k}}| = \frac{\overline{x_2} - \overline{x_1}}{t} = \frac{|-5\cdot 10^{-9}\text{m}|}{4\cdot 10^{-6}\text{s}} = 1{,}25\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{1{,}3\frac{\text{mm}}{\text{s}}}$$

Asemat ajan hetkillä 0 s ja 4μs saadaan kuvan avulla pinta-aloja ja keskinopeuksia käyttäen.

$$(x_1 = 0 \text{ ja } x_2 = 15\frac{\text{mm}}{\text{s}}\cdot 1\mu s - 20\frac{\text{mm}}{\text{s}}\cdot 1\mu\text{s} = -5\cdot 10^{-9}\,\text{m})$$

c) Kuljetut matkat saadaan kuvasta pinta-alojen avulla.

$$v_\text{k} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{t}$$

$$= \frac{15\frac{\text{mm}}{\text{s}}\cdot 1\mu\text{s} + 10\frac{\text{mm}}{\text{s}}\cdot 1\mu\text{s} + 10\frac{\text{mm}}{\text{s}}\cdot 1\mu\text{s} + 20\frac{\text{mm}}{\text{s}}\cdot 1\mu\text{s}}{4\mu\text{s}} = 13{,}75\frac{\text{mm}}{\text{s}} = \underline{14\frac{\text{mm}}{\text{s}}}$$

— — — — — — — — — — — —

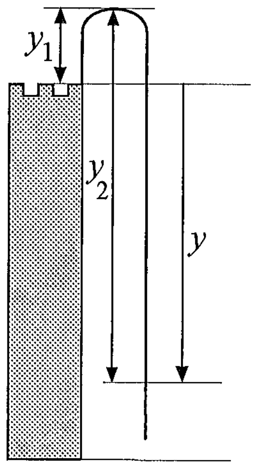
2.22. Kuljettu matka on reaktioaikana kuljetun matkan ja jarrutusmatkan summa.

jarrutusaika $t_2 = \dfrac{v}{a}$

$$s = s_1 + s_2 = vt_1 + \frac{1}{2}at_2^2 = \frac{120}{3.6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 0{,}7\text{s} + \frac{1}{2}\cdot 7\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{120}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{1}{7{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\right)^2 = 103\text{m} = \underline{100\text{m}}$$

— — — — — — — — — — — —

2.24. a) Lasketaan ensin nousukorkeus heittokohdasta ylöspäin. Nousuaika $t = \frac{v}{g}$. Sijoitetaan tämä korkeuden lausekkeeseen.



$$y_1 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}\right)^2 = \frac{v^2}{2g} = 7{,}35\text{m}$$

Nousuaika $t_n = 1{,}2245\text{s}$, putoamisaika huipun ohituksen jälkeen $t_2 = 5\text{s} - t_v = 3{,}7755\text{s}$

Tänä aikana kappale laskeutuu matkan:

$$y_2 = \frac{1}{2}gt_2^{\,2} = 69{,}8466\text{m}$$

$\Rightarrow$ Kuljettu matka $y_1 + y_2 = \underline{77\text{m}}$

b) Kappaleen asema ajan hetkellä *t*, kun alkunopeus on v_0

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = -62{,}5\text{m} \Rightarrow \underline{7{,}5\text{m maasta}}$$

— — — — — — — — — — — —

2.26. Kohtaaminen tapahtuu, jos kohdassa $x_A = x_B = 3{,}0\,\text{m} \cdot \cos 37°$ korkeus $y_A = y_B$.
A pallolle pätee $x_A = 3{,}0\,\text{m} \cdot \cos 37° = v_0 \cdot \cos 37° \cdot t$. $\Rightarrow$ kohtaamisaika

$$t = \frac{3\text{m} \cdot \cos 37°}{v_0 \cos 37°} = \frac{3\text{m}}{6{,}0\,\text{m/s}} = 0{,}50\text{s}.$$

Korkeuksille saadaan yhtälöt $\begin{cases} y_A = v_0 \sin 37° \cdot t - 0{,}5\,g\,t^2 \\ y_B = 3{,}0\,\text{m}\ \sin 37° - 0{,}5\,g\,t^2 \end{cases}$

Sijoitetaan v_0 ja t ja saadaan $y_A = y_B = 0{,}58\,\text{m}$ (kun B on pudonnut 1,23 m)

— — — — — — — — — — — —

2.28. Hetkellä *t* pätee:

$$\begin{cases} 77{,}52\text{m} = v_0 \cos 45° \cdot t \\ -2\text{m} = v_0 \sin 45° \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Ratkaistaan esim. laskimella $\Rightarrow v_0 = \underline{27\frac{\text{m}}{\text{s}}}$

— — — — — — — — — — — —

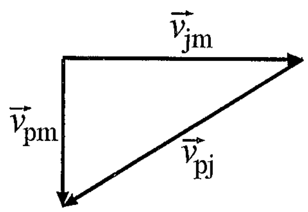
2.30. Kuvan kolmiosta saadaan:

$$\bar{v}_{pj} + \bar{v}_{jm} = \bar{v}_{pm}$$

$$v_{jm} = 50\frac{\text{km}}{\text{h}} = 13{,}89\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{pm} = v_{jm} \cdot \cot 60° = 8{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{pj} = \sqrt{13{,}89^2 + 8^2} = \underline{16\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$



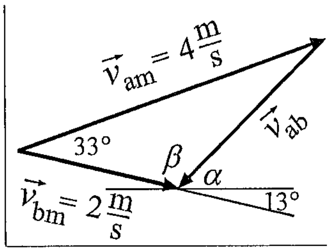
— — — — — — — — — — — —

2.32. a) Kuvan kolmiosta saadaan kosinilauseen avulla

$$\vec{v}_{ab} = \vec{v}_{am} - \vec{v}_{bm}$$
$$\vec{v}_{am} = \vec{v}_{ab} + \vec{v}_{bm}$$
$$v_{ab}{}^2 = v_{am}{}^2 + v_{bm}{}^2 - 2v_{am} \cdot v_{bm} \cdot \cos 33°$$
$$v_{ab} = \sqrt{6{,}58}\,\frac{m}{s} = 2{,}6\,\frac{m}{s}$$

Sinilauseella: $\beta : \dfrac{\sin\beta}{4} = \dfrac{\sin 33°}{2{,}56} \Rightarrow \beta = 58{,}3° / \underline{121{,}7°}$

$$\alpha = 180° - 13° - \beta = \underline{45°}$$



b) A:n ja B:n uudet koordinaatit ajan hetkellä t:

$$A: \begin{cases} x = 4 \cdot \cos 20° \cdot t \\ y = 4 \cdot \sin 20° \cdot t \end{cases} \qquad B: \begin{cases} x = \dfrac{150\text{m}}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \cos 13° \cdot t \\ y = \dfrac{150\text{m}}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \sin 13° \cdot t \end{cases}$$

Hetkellä $t = 58{,}6$ s kumpikin vene on samassa koordinaattipisteessä, eli ne törmäävät. Tulos saadaan myös vertailemalla nopeus- ja matkakolmioita. Ne ovat yhdenmuotoiset ajan hetkellä $t = \dfrac{150\text{m}}{2{,}56\frac{m}{s}} = 59\,\text{s}$

2.34. $v_0 = at = 2{,}0\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}50\text{s} = 1{,}0\frac{m}{s}$ ylöspäin ↑

Hissi : $s_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ ↑

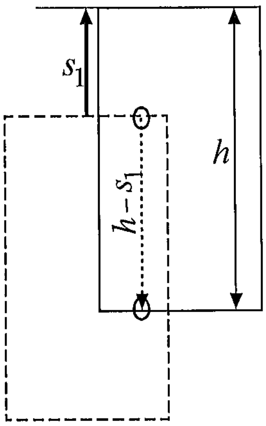
Kappale : $h - s_1 = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}(a+g)t^2$

(siis lähenee lattiaa kiihtyvyydellä $a + g$)

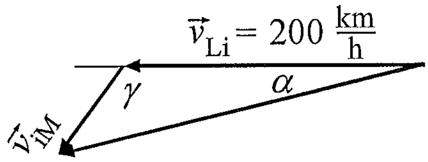
a) $\Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2h}{a+g}} = 0{,}713\text{s} = \underline{0{,}71\text{s}}$

b) $s' = v_0{}^2 / 2g = 0{,}051\text{m}$, $\quad b = h - s_1 + 2s_1' = \underline{1{,}9\text{m}}$

c) $v_H = v_0 + at = 2{,}43\frac{m}{s}$ ↑ $\quad v_k = -v_0 + gt = 5{,}99\frac{m}{s}$ ↓ $\Rightarrow v_{kh} = \underline{8{,}4\frac{m}{s}}$



2.36. Lentokoneen nopeus maahan nähden saadaan kuvasta jakamalla kuljettu matka ajalla, eli



$$v_{\mathrm{LM}} = \frac{s}{t} = \frac{123{,}7\mathrm{km}}{0{,}5\mathrm{h}} = 247{,}4\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

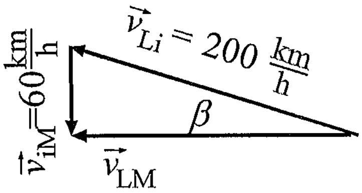
$$\alpha = \arctan\frac{30}{120} = 14{,}0°$$

Kosinilauseen avulla ilman nopeudeksi maan suhteen tulee

$$v_{\mathrm{iM}} = \sqrt{v_{\mathrm{Li}}^2 + v_{\mathrm{LM}}^2 - 2v_{\mathrm{Li}} \cdot v_{\mathrm{LM}} \cdot \cos\alpha} = \underline{72\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}.$$

Suunta sinilauseen avulla

$$\frac{v_{\mathrm{iM}}}{\sin\alpha} = \frac{v_{\mathrm{LM}}}{\sin\gamma} \Rightarrow \gamma = 124° \Rightarrow \underline{\beta = 56°\text{lännestä etelään.}}$$



b) Kolmiosta

$$\frac{v_{\mathrm{iM}}}{\sin\alpha} = \frac{v_{\mathrm{LM}}}{\sin\gamma} \Rightarrow \beta = \arctan\frac{60}{200} = 16{,}7° = \underline{17°}$$

— — — — — — — — — — —

2.38. a) $v^2 = v_0^2 - 2gy = \left(10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - 2 \cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4\mathrm{m} \Rightarrow v = \underline{4{,}6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$

b) $(v = v_0 - gt \Rightarrow t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 4{,}65\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{g} = \underline{0{,}55\mathrm{s}})$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \left.\begin{matrix} 1{,}5\mathrm{s} \\ \underline{0{,}55\mathrm{s}} \end{matrix}\right\}$$

c) $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \underline{2{,}8\mathrm{m}}$

— — — — — — — — — — —

2.40. a) Kirjan kuvan perusteella ajassa 5 s kierretty kulma

$$\alpha = \frac{s}{R} = \frac{0{,}40\mathrm{m}}{0{,}20\mathrm{m}} = 2{,}0\mathrm{rad} = 114{,}6°$$

Keskinopeusvektorin suuruus

$$|v_{\mathrm{k}}| = \frac{|\overline{\Delta r}|}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 0{,}20\mathrm{m} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{5{,}0\mathrm{s}} = 0{,}067\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \underline{6{,}7\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}}$$

b) $v_{\mathrm{k}} = \frac{\text{kulj.matka}}{\text{aika}} = \frac{(30\mathrm{cm} + 20\mathrm{cm} + 30\mathrm{cm})}{5\mathrm{s}} = \underline{16\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}}$

c) Käyrästä $s = s(t)$: $v = \frac{(10 - 30)\mathrm{cm}}{(3 - 1)\mathrm{s}} = -10\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \Rightarrow \underline{10\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}}$

— — — — — — — — — — —

Luku 3

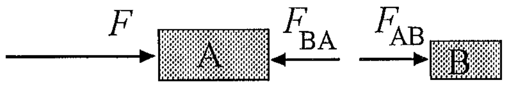
3.2. Tasaisesti hidastuva liike ja Newtonin laki

a) $s=\frac{1}{2}v_0\,t \;\Rightarrow\; t=\frac{2s}{v_0}=\frac{2\cdot 0{,}10\,\mathrm{m}}{360\,\mathrm{m/s}}=\underline{0{,}56\,\mathrm{ms}}.$

b) $F=ma=m\frac{v_0}{t}=1{,}8\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\cdot\frac{360\,\mathrm{m/s}}{0{,}556\cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}}=\underline{1{,}2\,\mathrm{kN}}.$

— — — — — — — — — — — —

3.4. Piirretään vapaakappalekuva ja merkitään siihen voimat
Valitaan koordinaatiston + oikealle ja saadaan
yhtälöpari



$$\begin{cases}\text{A:} & 14\,\mathrm{N}-F_1=3{,}7\,\mathrm{kg}\cdot a\\ \text{B:} & +F_1=1{,}6\,\mathrm{kg}\cdot a\end{cases}$$

$|F_{BA}|=|F_{AB}|=F_1$

Ratkaisuksi saadaan $\underline{a=2{,}6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$ ja $\underline{F_1=4{,}2\,\mathrm{N}}.$

— — — — — — — — — — — —

3.6. Kun elektroni on sähkökentässä, sen liike on x-suunnassa vakio ja y-suunnassa tasaisesti kiihtyvää.

x-nopeudesta saadaan kentässäolon aika $t=\frac{x}{v_0}=\frac{80\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{2{,}2\cdot 10^{7}\,\mathrm{m/s}}=3{,}64\cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}.$

y-suunnan kiihtyvyys on $a=\frac{F}{m}=\frac{4{,}5^{-15}\,\mathrm{N}}{9{,}11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}=4{,}94\cdot 10^{15}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$ Nyt saadaan

kuvan 3-27 $y=\frac{1}{2}a\,t^2=\underline{33\,\mathrm{mm}}$ ja $v_y=a\,t=18{,}0\cdot 10^{6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, jolloin $\alpha=\arctan\frac{v_y}{v_0}=\underline{39°}.$

— — — — — — — — — — — —

3.8. Pyörän yli kulkevassa langassa, kuva 3-29, vaikuttava voima F_1 on sama pyörän molemmilla puolilla ja voiman suuruus on $F_1=F/2$. Jos lattian tukivoima oletetaan nollaksi saadaan liikeyhtälöt ja kiihtyvyydet.

Kappaleelle A $F_1-m_A\,g=m_A\,a_A \;\Rightarrow\; a_A=\frac{F_1}{m_A}-g$ ja

kappaleelle B $F_1-m_B\,g=m_B\,a_B \;\Rightarrow\; a_B=\frac{F_1}{m_B}-g.$

a) $F_1=60\,\mathrm{N}.$ $a_A=\frac{60\,\mathrm{N}}{20\,\mathrm{kg}}-9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}=-6{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$ Mahdoton! $\Rightarrow$ $\underline{a_A=0}.$

$a_B=\frac{60\,\mathrm{N}}{20\,\mathrm{kg}}-9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}=-6{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$ Mahdoton! $\Rightarrow$ $\underline{a_B=0}.$

b) $F_1=100\,\mathrm{N}.$ Saadaan myös $\underline{a_A=0}.$ $\underline{a_B=0}.$

c) $F_1 = 160\text{ N}$. $\underline{a_A = 0.}$ $a_B = \dfrac{160\text{ N}}{20\text{ kg}} - 9{,}8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{3{,}5\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$

d) $F_1 = 225\text{ N}$. $a_A = \dfrac{225\text{N}}{20\text{ kg}} - 9{,}8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{1{,}5\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$ $a_B = \dfrac{225\text{N}}{20\text{ kg}} - 9{,}8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{9{,}0\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$

e) $F_1 = 450\text{ N}$. $a_A = \dfrac{450\text{N}}{20\text{ kg}} - 9{,}8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{13\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$ $a_B = \dfrac{450\text{N}}{20\text{ kg}} - 9{,}8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{25\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$

— — — — — — — — — — —

3.10. Kappaleilla on yhteinen kiihtyvyys a ja kuvan perusteella saadaan liikeyhtälöt

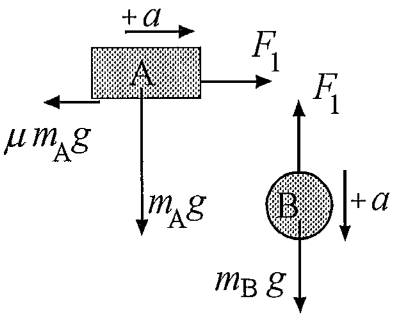
$$F_1 - \mu m_A\, g = m_A\, a$$

$$-F_1 + m_B\, g = m_B\, a$$

a) Sijoitetaan annetut arvot ja ratkaistaan

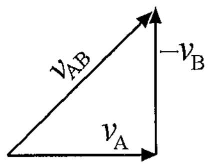
$\underline{F_1 = 9{,}6\text{N}}$ sekä $a = 0{,}245\text{m}/\text{s}^2$.

Vapaakappalekuvat voimineen ja + -suuntineen



b) Liike on tasaisesti kiihtyvää, $v = a\,t$, joten

$$|v_A| = |v_B| = 0{,}245\text{m}/\text{s}^2 \cdot 0{,}25\text{s} = 0{,}0613\text{m}/\text{s}.$$



Suhteellisen nopeuden mukaisesti

$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \underline{0{,}087\dfrac{\text{m}}{\text{s}},\ \text{suunta } 45° \text{ yläviistoon.}}$

— — — — — — — — — — —

3.12. Lasketaan ensin y-suunta, jossa on voimien tasapaino.

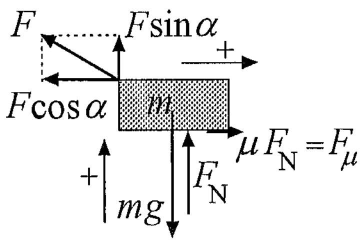
$F\sin\alpha + F_N - mg = 0 \;\Rightarrow\; F_N = 19{,}4\text{N}.$

a) $F_\mu = 0{,}30 \cdot 19{,}4\text{N} = \underline{5{,}8\text{N}}.$

b) x-suunnan liikeyhtälö on

$F\cos\alpha - F_\mu = ma \;\Rightarrow\; \underline{a = 3{,}8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}.$

Vapaakappalekuva, voimakuva ja + -suunnat.



— — — — — — — — — — —

3.14. a) Liikettä ylläpitävän voiman on oltava yhtä suuri kuin kitkan itseisarvo.

$|F_\mu| = \mu mg = 0{,}2 \cdot 10\text{kg} \cdot 9{,}8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = \underline{20\text{ N}}.$

b) Liike on tasaisesti hidastuvaa, jossa $a = \dfrac{F_\mu}{m}$. Kappale pysähtyy. Silloin

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0\,m}{F_\mu} = \frac{5\text{m}/\text{s} \cdot 10\text{kg}}{19{,}6\text{N}} = \underline{2{,}6\text{ s.}}$$

— — — — — — — — — — —

3.16. Vaikuttavan voiman yhtälö on $F = 6\dfrac{\text{N}}{\text{s}} \cdot t$.

a) Kappale alkaa liikkua, kun vaikuttava voima on suurempi kuin lepokitka
$F_{\mu s} = \mu_s\, m g = 0{,}30 \cdot 8\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m}/\text{s}^2 = 23{,}5\,\text{N}$. Ajanhetkeksi saadaan $t = \dfrac{23{,}5\,\text{N}}{6\,\text{N}/\text{s}} = \underline{3{,}9\,\text{s}}$.

b) Hetkellä 7 s vaikuttava voima on 42 N ja liikeyhtälöksi saadaan

$$42\,\text{N} - \mu_k\, m g = m a \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 2{,}8\,\text{m}/\text{s}^2}.$$

— — — — — — — — — — —

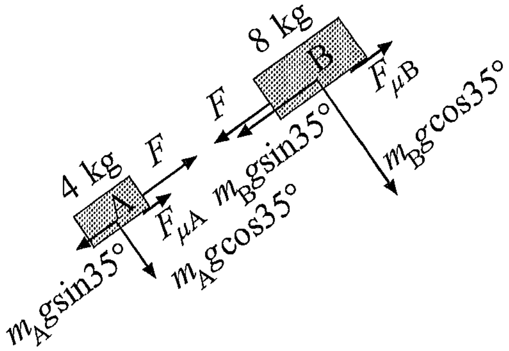
3.18. a) Kappale B "jarruttaa" kappaletta A, koska $\mu_{kB} > \mu_{kA}$. Kappaleet liukuvat samalla kiihtyvyydellä ja vapaakappalekuvien voimista saadaan liikeyhtälöt

A: $m_A g \sin 35° - F - \mu_{kA} m_A g \cos 35° = m_A a$

B: $m_B g \sin 35° + F - \mu_{kB} m_B g \cos 35° = m_B a$

Sijoitetaan arvot, ratkaistaan ja saadaan tulokset

$a = 2{,}276\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx \underline{2{,}3\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}$ ja $F = 5{,}35\,\text{N} \approx \underline{5{,}4\,\text{N}}$.



b) Aluksi kappaleet ovat erossa toisistaan ja B saavuttaa A:ta. Lanka on löysällä ja $F = 0$.
Liikeyhtälöt ovat

A: $m_A g \sin 35° - \mu_{kA} m_A g \cos 35° = m_A a_A \quad \Rightarrow \quad a_A = 1{,}607\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx \underline{1{,}6\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}$.

B: $m_B g \sin 35° - \mu_{kB} m_B g \cos 35° = m_B a_B \quad \Rightarrow \quad a_B = 3{,}614\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx \underline{3{,}6\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}$.

Toiseksi kappaleet ovat kiinni toisissaan ja B työntää A:ta voimalla F_T.
Liikeyhtälöt ovat nyt

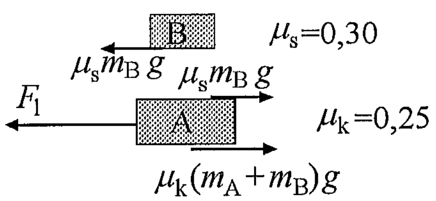
A: $m_A g \sin 35° + F_T - \mu_{kA} m_A g \cos 35° = m_A a$

B: $m_B g \sin 35° - F_T - \mu_{kB} m_B g \cos 35° = m_B a$

$\Rightarrow \quad a = 2{,}945\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx \underline{2{,}9\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}}$, $\quad |F_T| = 5{,}345\,\text{N} \approx \underline{5{,}3\,\text{N}}$.

— — — — — — — — — — —

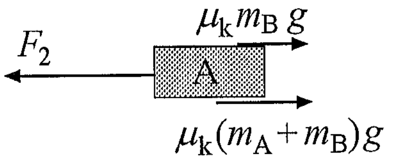
3.20.



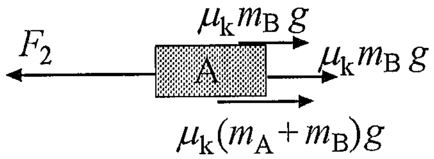
a) Kappaleen B kiihtyvyys aiheutuu A:n ja B:n välisestä kitkasta, jonka maksimiarvo on $\mu_s m_B g \Rightarrow a_B = \mu_s g$.
A:n liikeyhtälöksi saadaan

$F_1 - \mu_s m_B g - \mu_k (m_A + m_B) g = m_A a_B = m_A \mu_s g$

Sijoittamalla arvot saadaan $\underline{F_1 = 65\,\text{N}}$.

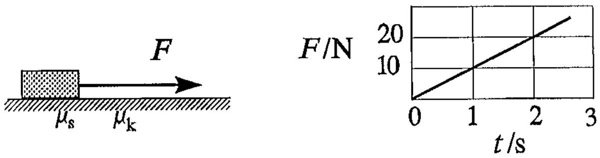


b1) Kappale B pysyy paikallaan ja A on tasaisessa liikkeessä. Silloin
$F_2 = \mu_k m_B g + \mu_k (m_A + m_B) g = \underline{39\,\text{N}}$.



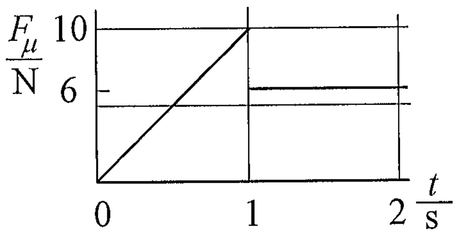
b2) Myös kappale B on tasaisessa liikkeessä ja voima tulee pyörän kautta A:lle. Kappaleen A liikeyhtälö antaa
$F_2 = 2 \cdot \mu_k m_B g + \mu_k (m_A + m_B) g = \underline{49\,\text{N}}$.

3.22. a) Kappale on aluksi levossa ja $F - F_{\mu s} = 0$. Lepokitkan maksimiarvo on
$F_{\mu s,\max} = 0{,}5 \cdot 20\,\text{N} = 10\,\text{N}$.
$\Rightarrow$ liikkeellelähtöhetki on $\underline{1{,}0\text{ s}}$.



Kuva 3-38. Tehtävä 3.22.

b) Aikavälinä $0 \to 1$ s lepokitka kasvaa arvosta 0 arvoon 10 N. Hetken 1,0 s jälkeen kitka on liikekitkaa $= \mu_k F_G = 6\,\text{N}$.
Kitkapiirros vieressä.



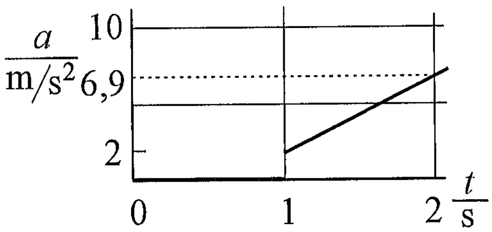
c) Aikavälinä $0 \to 1$ s $a = 0$.
Liikkeellelähdön jälkeen hetkellä 1,0 s on

$$10\,\text{N} - 0{,}3 \cdot 20\,\text{N} = m a_1 = \frac{20\,\text{N}}{9{,}8\,\text{m/s}^2} \cdot a_1$$

$\Rightarrow \quad a_1 = 2{,}0\,\text{m/s}^2$.
Hetkellä 2,0 s saadaan

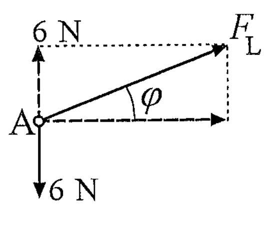
$$20\,\text{N} - 0{,}3 \cdot 20\,\text{N} = m a_2 = \frac{20\,\text{N}}{9{,}8\,\text{m/s}^2} \cdot a_2$$

$\Rightarrow \quad a_2 = 6{,}9\,\text{m/s}^2$.
Arvojen perusteella piirretään kuva kiihtyvyydestä.

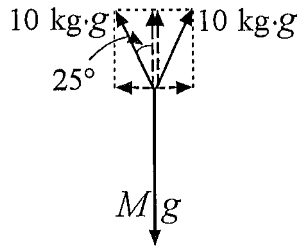


3.24. Langan rasitus on langan suuntainen sekä sama välillä AB ja BC. Pisteessä A lankarasituksen pystykomponentin on oltava puolet taulun painovoimasta eli 6 N. Kuvan 3-40 perusteella saadaan viereisen kuvan kulmaksi $\varphi = 22°$. Silloin

$$\sin 22° = \frac{6\,\text{N}}{F_L} \quad \Rightarrow \quad \underline{F_L = 16\,\text{N}}.$$

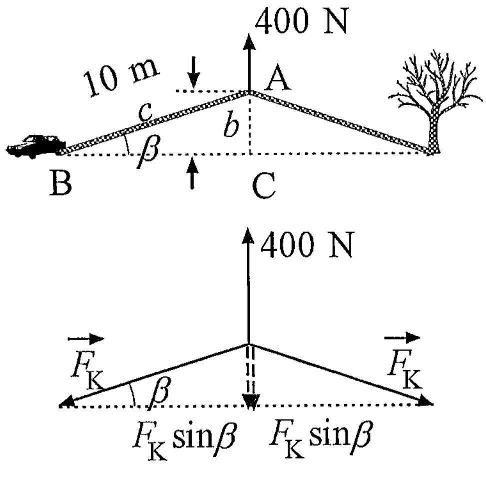


3.26. Massan M ja lankojen kiinnityskohtaan saadaan viereinen voimakuva.



Tasapainossa
$M\,g = 2\cdot\left(10\,\mathrm{kg}\cdot g\cdot\cos 25^\circ\right)$
Ratkaisuna $\underline{M = 18\,\mathrm{kg}}$.

3.28. Tilannekuvan vetokohtaan A piirretään voimakuva. Tilannekuvasta saadaan

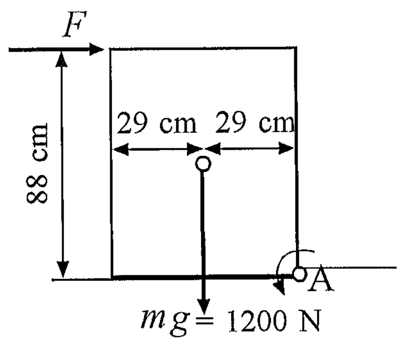


$\sin\beta = b\,/\,c$
ja voimakuvan pystykomponenttien tasapainosta
$F_\mathrm{K}\cdot\sin\beta = 400\,\mathrm{N}\,/\,2$

a) $F_\mathrm{K} = \dfrac{400\,\mathrm{N}}{2}\cdot\dfrac{10\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{m}} = \underline{1000\,\mathrm{N}}.$

b) $F_\mathrm{K} = \dfrac{400\,\mathrm{N}}{2}\cdot\dfrac{10\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{m}} = \underline{500\,\mathrm{N}}.$

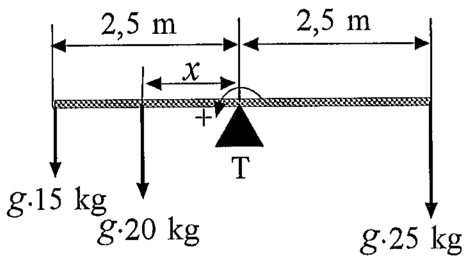
3.30. Momenttien tasapaino kynnyspisteen A suhteen (mitat viereisessä kuvassa)



$-F\cdot 88\mathrm{cm} + 1200\mathrm{N}\cdot 29\mathrm{cm} = 0$
$\Rightarrow \underline{F = 400\ \mathrm{N}}.$

cm supistuu, joten ei ole syytä muuttaa mittoja metreiksi.

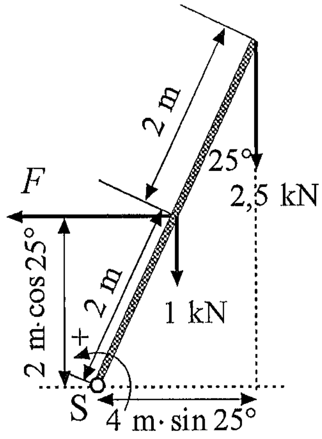
3.32. 20 kg painavan lapsen on asetuttava 15 kg painavan lapsen puolelle etäisyydelle x keskipisteestä T. Kuvan mukainen momenttien tasapaino on



$+g\cdot 15\mathrm{kg}\cdot 2{,}5\mathrm{m} + g\cdot 15\mathrm{kg}\cdot x - g\cdot 25\mathrm{kg}\cdot 2{,}5\mathrm{m} = 0$
$\Rightarrow\quad \underline{x = 1{,}25\mathrm{m}}.$

g supistuu, joten painovoimia ei kannata laskea.

3.34. Piirretään voimakuva ja merkitään siihen myös tarvittavat mitat. Momentit on kätevä laskea saranapisteen S suhteen



$+F \cdot 2\text{m} \cdot \cos 25° - 1\text{kN} \cdot 2\text{m} \cdot \sin 25°$

$-2\text{kN} \cdot 4\text{m} \cdot \sin 25° = 0$

$\Rightarrow F = \underline{2{,}3\text{kN}}.$

Tässä kN on käyttökelpoinen yksikkö.

3.36. Piirretään tilannekuva ja merkitään siihen voimat ja mitat.
Yläsarana kannattaa oven koko painon
$\Rightarrow \quad F_y = 245\,\text{N}.$
Vaakasuunnassa yläsaranan "veto" F_x ja alasaranan "työntö" F_x ovat yhtä suuret.
Momenttien tasapaino yläsaranan suhteen antaa
$+F_x \cdot 150\,\text{cm} - 245\,\text{N} \cdot 45\,\text{cm} = 0$

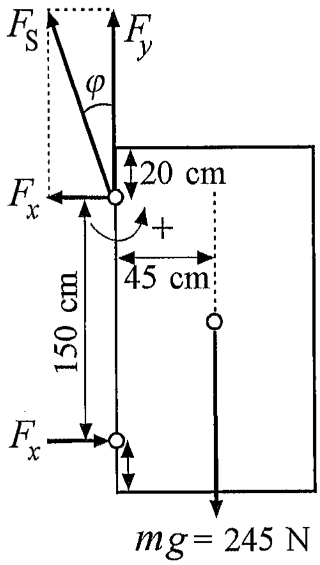
$\Rightarrow \quad F_x = 73{,}5\,\text{N} \approx \underline{74\,\text{N}}.$

Yläsaranassa vaikuttavaksi voimaksi saadaan

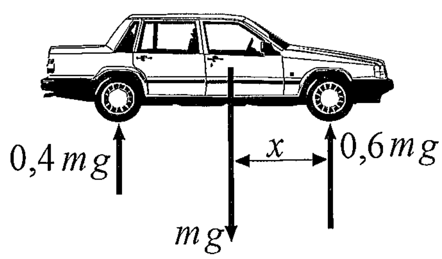
$F_S = \sqrt{245^2 + 73{,}5^2}\,\text{N} = \underline{260\,\text{N}}$

Sen suuntakulma on

$\varphi = \arctan\dfrac{73{,}5\,\text{N}}{245\,\text{N}} = \underline{17°}.$



3.38. Merkitään painopisteen etäisyys etuakselista = x.
Momentit etuakselin suhteen antavat



$-0{,}4 \cdot mg \cdot 3280\text{mm} + mg \cdot x = 0$

$\Rightarrow x = \underline{1310\text{ mm}}.$

3.40. Piirretystä vapaakappale/voimakuvasta saadaan voimien tasapainoille yhtälöt

y - suunta: $F_y = 100\,\text{N} + mg = 884\,\text{N}$

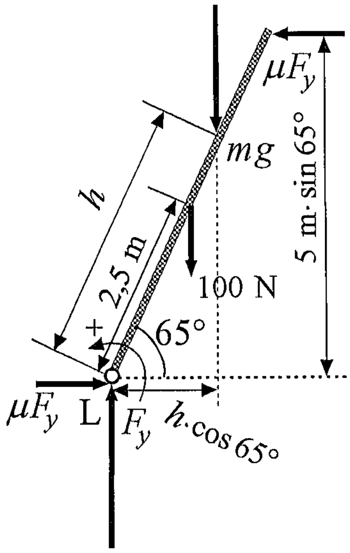
x - suunta: $\mu F_y = 0{,}40 \cdot 884\,\text{N} = 353{,}6\,\text{N}$

Miehen kiivetessä seinän työntövoima ja kitka kasvavat, kunnes liukuminen alkaa. Momentit tikapuiden lattiapisteen L suhteen ovat rajatilanteessa vielä tasapainossa.

$+\mu F_y \cdot 5\,\text{m} \cdot \sin 65° - mg \cdot h \cdot \cos 65°$

$-100\,\text{N} \cdot 2{,}5\,\text{m} \cdot \cos 65° = 0$

Sijoitetaan arvot ja saadaan $\underline{h = 4{,}5\,\text{m}}$.



Luku 4

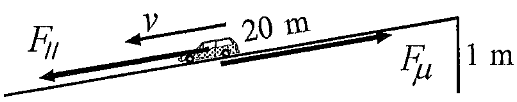
4.2. a) Liike-energia = voiman tekemä työ

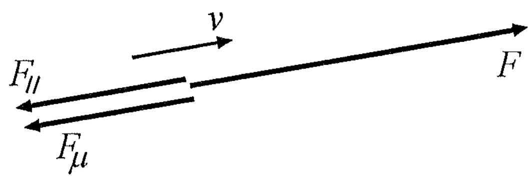
$$F\,s = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{6\,\text{kg} \cdot 7^2\,(\text{m/s})^2}{2 \cdot 3{,}5\,\text{m}} = \underline{42\,\text{N}}.$$

b) Koska voima on vakio, liike on tasaisesti kiihtyvää. Silloin $v = a\,t$ ja

$$t = \frac{v}{a} = \frac{v}{F/m} = 1{,}0\,\text{s}. \quad \text{ja} \quad P = \frac{W}{t} = \frac{F\,s}{t} = \underline{150\,\text{W}}.$$

4.4.





alaspäin $F_{//} = F_\mu$

ylöspäin $F = F_{//} + F_\mu = 2 \cdot F_{//}$

$$F_{//} = \frac{1}{20} m g \quad \text{ja} \quad P = F\,v = 2 \cdot \frac{1}{20} m g \cdot v = \frac{2}{20} \cdot 1200\,\text{kg} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 18 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{21\,\text{kW}}.$$

4.6. Pystysuunnassa on voimien tasapaino

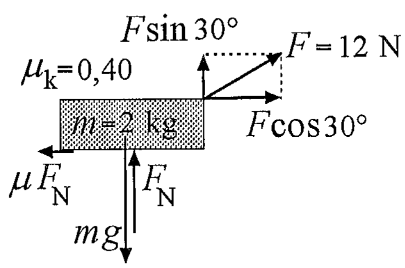
$$F_\text{N} = 2\,\text{kg} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 12\,\text{N} \cdot \sin 30° = 13{,}6\,\text{N}.$$

Kitkaksi saadaan $\mu F_\text{N} = 0{,}40 \cdot 13{,}6\,\text{N} = 5{,}44\,\text{N}$.

Vaakasuunnassa saadaan

$$m\,a = 12\,\text{N} \cdot \cos 30° - 5{,}44\,\text{N} \Rightarrow a = 2{,}48 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vapaakappale - voimat kuvio



Hetkellä 5 s

a) $s_5 = \frac{1}{2} a t^2 = 30{,}95\,\text{m}$

ja $P_k = \dfrac{F\cos 30°\cdot s}{t} = \underline{64\,\text{W}}.$

b) $v_5 = a\,t = 12{,}38\,\text{m/s}$

ja $P_5 = v_5 \cdot F\cos 30° = \underline{130\,\text{W}}.$

— — — — — — — — — — — —

4.8. Voima on vinossa liikesuuntaa vastaan, joten voiman tekemä työ on $F\,s\cos 30°$.
Voima on muuttuva ja tässä Fs saadaan pinta-alana kuvasta 4-26.
Pinta-ala = $30\,\text{N}\cdot 5\,\text{m} + 40\,\text{N}\cdot 2{,}5\,\text{m} + 30\,\text{N}\cdot 2{,}5\,\text{m} = 325\,\text{J}$. Silloin

$W = 325\,\text{J}\cdot\cos 30° = \underline{280\,\text{J}}.$

— — — — — — — — — — — —

4.10. Pumpun antoteho = nostoteho + vauhditusteho

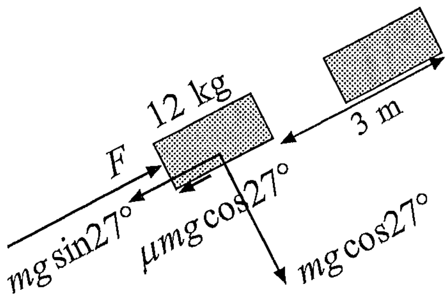
$$P_a = q_m\,g\,h + \frac{1}{2} q_m v^2 = \rho\frac{V}{t}\left(g\,h + \frac{1}{2}v^2\right)$$

$$= 1000\,\text{kg}\cdot\frac{0{,}75\,\text{m}^3}{60\,s}\left(9{,}8\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 10^2\right)\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1360\,\text{W}$$

Ottoteho $P_o = \dfrac{P_a}{\eta} = \dfrac{1360\,\text{W}}{0{,}75} = \underline{1{,}8\,\text{kW}}.$

— — — — — — — — — — — —

4.12.



a) Voima F = 160 N, työ $W_F = 160\,\text{N}\cdot 3\,\text{m} = \underline{480\,\text{J}}.$

Painovoima $mg = 12\,\text{kg}\cdot 9{,}8\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} = 117{,}6\,\text{N}$.

Työ $W_G = -117{,}6\,\text{N}\cdot 3\,\text{m}\cdot\sin 27° = \underline{-160\,\text{J}}.$

Kitka $F_\mu = -\mu\,m\,g\cos 27° = -21{,}0\,\text{N}.$

Työ $W_\mu = -21{,}0\,\text{N}\cdot 3\,\text{m} = \underline{-63\,\text{J}}.$

b) Resultantin työ = töitten summa = 257 J = $\underline{260\,\text{J}}.$

c) Liike-energian muutos = resultantin työ = $\underline{260\,\text{J}}.$

d) Potentiaalienergian muutos

$\Delta E_G = mgs\sin 27° = \underline{160\,\text{J}}.$

e) Mekaanisen energian muutos

$\Delta E_{\text{mek}} = W_F + W_\mu = 480\text{J} - 63\text{J} = \underline{420\text{J}}.$

— — — — — — — — — — — —

4.14. Antoteho = hyötysuhde × veden potentiaalienergian muutoksen teho

$$P_a = \eta\,q_m\,g\,h = \eta\frac{V}{t}g\,h = 0{,}7\cdot 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot\frac{400\,\text{m}^3}{60\,\text{s}}\cdot 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 12\,\text{m} = \underline{550\,\text{kW}}.$$

— — — — — — — — — — — —

4.16. Jousen energia $\frac{1}{2}ky^2$ muuttuu "liike-energian" kautta kitkatyöksi $\mu m g s$.

$$\mu = \frac{ky^2}{2mgs} = \frac{200\,\mathrm{N/m}\cdot 0{,}05^2\,\mathrm{m}^2}{2\cdot 0{,}2\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}3\,\mathrm{m}} = \underline{0{,}43}.$$

— — — — — — — — — — — —

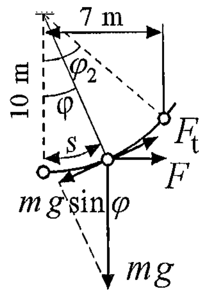
4.18. a) $\eta\cdot$ lämpöenergia $= F_\mu s \Rightarrow F_\mu = 0{,}3\cdot\frac{7\,\mathrm{dm}^3}{100\cdot 10^3\,\mathrm{m}}\cdot 32\cdot 10^6\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{dm}^3} = 672\,\mathrm{N} = \underline{670\,\mathrm{N}}.$

b) Kaltevuus 5° $\Rightarrow$ painovoiman mäen suuntainen komponentti $mg\cdot\sin 5° = 854\,\mathrm{N}$.
Polttoaineen kulutus on suoraan verrannollinen voimaan. Silloin

$$\frac{\mathrm{k}_2}{7\ \mathrm{dm}^3/100\,\mathrm{km}} = \frac{(854+672)\,\mathrm{N}}{672\,\mathrm{N}} \Rightarrow \mathrm{k}_2 = \underline{16\frac{\mathrm{dm}^3}{100\,\mathrm{km}}}.$$

— — — — — — — — — — — —

4.20. Lasketaan siirtoa vastaava kaaren pituus



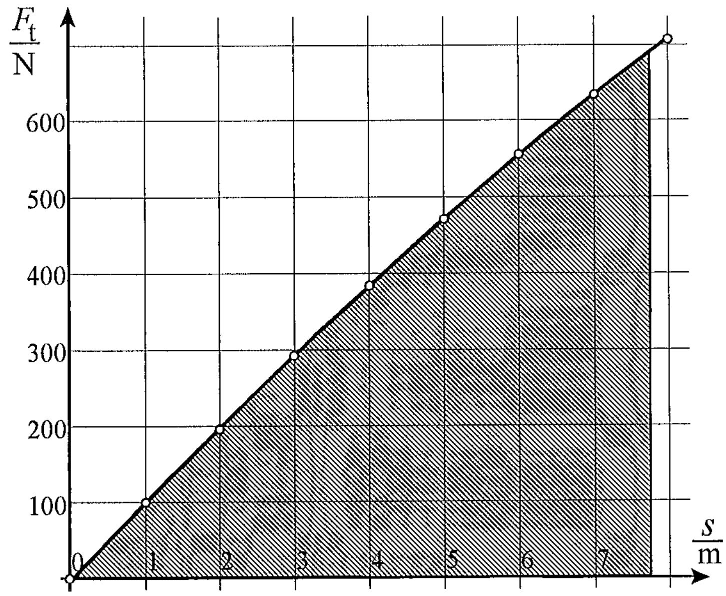
$$\varphi_2 = \arcsin\frac{7\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{m}} = 0{,}7754\,\mathrm{rad} \Rightarrow s_2 = 7{,}754\,\mathrm{m}.$$

Asemassa s on vetävän voiman F tangentin suuntainen komponentti

$$F_\mathrm{t} = mg\sin\varphi = mg\sin\frac{s}{l}.$$

Piirrosta varten lasketaan käyrän $F_\mathrm{t} = F_\mathrm{t}(s)$ pisteitä:

$\frac{s}{\mathrm{m}}$	$\frac{F_\mathrm{t}}{\mathrm{N}}$	$\frac{s}{\mathrm{m}}$	$\frac{F_\mathrm{t}}{\mathrm{N}}$
0	0	5	470
1	9,8	6	553
2	19,5	7	631
3	29,0	8	703
4	38,2		



Piirretään laskettujen arvojen mukainen käyrä, jonka alle jäävä pinta-ala vastaa voiman tekemää työtä.

$$\mathrm{PA} \approx \frac{1}{2}\cdot 690\mathrm{N}\cdot 7{,}75\mathrm{m} \approx \underline{2{,}7\mathrm{kJ}}.$$

b) Pot.energian lisäys $= mgh$

$$= 100\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 10\mathrm{m}\cdot(1-\cos(0{,}7754\mathrm{rad})) \approx \underline{2{,}8\ \mathrm{kJ}}.$$

— — — — — — — — — — — —

4.22. Voimien resultantti on nolla asemassa, jossa jousen työntövoima on yhtä suuri kuin vastustava voima. Tässä asemassa myös pallon nopeus on suurin. Saadaan

$$k\,y_2 = 10\,\mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad y_2 = \frac{10\,\mathrm{N}}{525\,\mathrm{N/m}} = 19{,}0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}.$$

Jousta oli aluksi puristettu matka $y_1 = 50\cdot 10^{-3}$ m.
Nopeuden suurin arvo saadaan energiaperiaatteella

$$\frac{1}{2}m v^2 = \frac{1}{2}k\left(y_1^2 - y_2^2\right) - 10\,\mathrm{N}\cdot\left(y_1 - y_2\right) \quad \Rightarrow$$

$$v^2 = \frac{525\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot\left(50^2 - 19{,}0^2\right)\cdot\left(10^{-3}\right)^2\ \mathrm{m} - 2\cdot 10\,\mathrm{N}\cdot(50 - 19{,}0)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}{10\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}} = 50{,}3\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

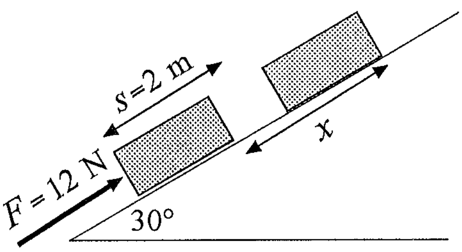
$$\Rightarrow \quad \underline{v = 7{,}1\,\mathrm{m/s}}.$$

— — — — — — — — — — — —

4.24. a) Koska kitkaa ei ole, voiman tekemä työ on yhtä suuri kuin kappaleen potentiaalienergian muutos.

$$F s = m g h = m g x \sin 30°$$

$$x = \frac{12\,\mathrm{N}\cdot 2\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\sin 30°} = \underline{2{,}4\,\mathrm{m}}.$$



b) Lähtöpisteen kohdalla voiman tekemä työ on kappaleen liike-energiaa.

$$\frac{1}{2}m v^2 = F s \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 F s}{m}} = \underline{4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}.$$

— — — — — — — — — — — —

4.26. Aluksi poika ei voi käyttää koko tehoaan, jotta takapyörä ei sutisi. Se merkitsee, että aluksi liikettä kiihdyttävä voima on vakio = takapyörän lepokitka = $F_1 = \mu_s\cdot 0{,}6\cdot m g$.
Tämä on voimassa, kunnes nopeus on kasvanut arvoon v_1, jossa teholle on $P = F_1 v_1$.
Alussa on voimassa $F_1 = m a$ ja $v_1 = a t$. Nyt saadaan

$$t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{P/F_1}{F_1/m} = \frac{P m}{F_1^2} = \frac{500\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}}\cdot 50\,\mathrm{kg}}{0{,}5^2\cdot 0{,}6^2\cdot 50^2\ \mathrm{kg}^2\cdot 9{,}8^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}} = 1{,}157\ \mathrm{s}.$$

Teho voidaan käyttää täytenä nopeudesta $v_1 = \frac{P}{F_1} = 5{,}56\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ alkaen.

Loppunopeus $v_2 = 20\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 5{,}56\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Loppuosassa teho on vakio ja energiaperiaate antaa

$$P t_2 = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{m\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2P} = 0{,}96\,\mathrm{s}.$$

Koko kiihdytysaika on $t = t_1 + t_2 = \underline{2{,}1\,\mathrm{s}}$.

Miten auto kiihtyy nopeimmin liukkaalla talvikelillä?

— — — — — — — — — — —

4.28. Vaikuttava voima on vaakasuora, joten kitka on $F_\mu = 0{,}4 \cdot 2\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 7{,}84\,\mathrm{N}$.

a) Kuvan 4-31 mukaan välillä 0 – 2 m voiman keskimääräinen arvo on 12,5 N. Siirroksessa 0 → 2 m saadaan töiden ja liike-energian muutokselle yhtälö

$$F_\mathrm{k} \cdot 2\,\mathrm{m} - F_\mu \cdot 2\,\mathrm{m} = \frac{1}{2} m v_2^2, \text{ josta } v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (12{,}5 - 7{,}84)\,\mathrm{N} \cdot 2\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{kg}}} = \underline{3{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}.$$

b) Matkan 2 m jälkeen liike hidastuu, koska kitka on suurempi kuin vetävä voima. Energiaperiaatteen mukaan kitkatyön itseisarvo matkalla $0 \to s_1$ on yhtä suuri kuin voiman tekemä työ matkalla $0 \to s_1$. Töitten yhtälöksi saadaan

$$7{,}84\,\mathrm{N} \cdot s_1 = 12{,}5\,\mathrm{N} \cdot 2\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{N} \cdot (s_1 - 2\,\mathrm{m}) \quad \Rightarrow \quad s_1 = \underline{5{,}3\,\mathrm{m}}.$$

Luku 5

5.2. Impulssilain mukaan

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \bar{I}$$

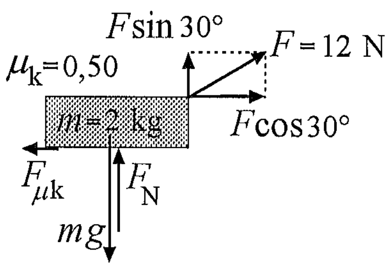
$$mv = mv_0 + \int_0^t F dt = mv_0 + \int_0^t 100\frac{\text{N}}{\text{s}} t dt \Rightarrow v = 3\frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{\frac{1}{2}\cdot 100\text{Ns}\cdot(10\text{s})^2}{250\text{kg}} = \underline{23\frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow}.$$

— — — — — — — — — — —

5.4. a) Ratkaistaan ensin kappaleen nopeus liike-energian avulla

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad v = \sqrt{\frac{2E_k}{\text{m}}} = 5{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kuvan perusteella liikeyhtälöt ovat



$$\begin{cases} F\cos 30° - F_{\mu k} = 0 & (1) \\ F_N - mg + F\sin 30° = 0 & (2) \\ F_{\mu k} = \mu_k F_N & (3) \end{cases}$$

$$(2),(3) \Rightarrow F_{\mu k} = \mu(mg - F\sin 30°)$$

$$(1) \Rightarrow F\cos 30° - \mu mg + \mu F\sin 30° = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{\mu mg}{\cos 30° + \mu \sin 30°} = 8{,}78\text{N}$$

Voiman teho $P = F_s v \qquad \Rightarrow P = F\cos 30° \cdot v = 8{,}78\text{N}\cdot\cos 30°\cdot 5\frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{38\text{W}}$

b) Voiman impulssi on määritelmän mukaan $\qquad I = Ft = 8{,}78\text{N}\cdot 5\text{s} = \underline{44\text{Ns}}$

— — — — — — — — — — —

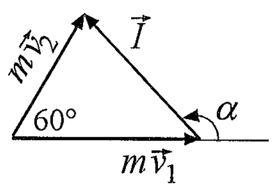
5.6. a) $|\Delta p| = m|(v_2 - v_1)| = 0{,}15\text{kg}\cdot\left|-36\frac{\text{m}}{\text{s}} - 24\frac{\text{m}}{\text{s}}\right| = \underline{9{,}0\text{Ns}}$

b) $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{9{,}0\text{Ns}}{0{,}0020\text{s}} = \underline{4{,}5\text{kN}}$

— — — — — — — — — — —

5.8. a) Voiman impulssi ratkaistaan impulssilakia ja kosinilausetta käyttäen.

$m = 5{,}0\,\text{kg} \quad v_0 = 8{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$



$$\bar{p}_2 = \bar{p}_1 + \bar{I}$$

$$I^2 = p_2^2 + p_1^2 - 2p_1p_2\cos 60° \Rightarrow I = \underline{36\text{Ns}}$$

b) $F = \frac{I}{t} = \frac{36{,}06\text{Ns}}{4\text{s}} = \underline{9{,}0\text{N}}$

Suunta : $\frac{I}{\sin 60°} = \frac{mv_2}{\sin\alpha'} \Rightarrow \sin\alpha' = \frac{mv_2\cdot\sin 60°}{I} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha' = 46° \\ \alpha = \underline{134°}\end{matrix}$

— — — — — — — — — — —

5.10. a) Ulkoisten voimien impulssi on nolla, joten ytimen hajotessa systeemin liikemäärä säilyy nollana:

$$0 = m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{Th}} v_{\mathrm{Th}}$$

$$|v_2| = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{4\mathrm{u} \cdot 1{,}4 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{234\mathrm{u}} = \underline{24 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

b) $$\frac{\frac{1}{2} m_{\mathrm{Th}} v_{\mathrm{Th}}^2}{\frac{1}{2} m_{\mathrm{Th}} v_{\mathrm{Th}}^2 + \frac{1}{2} m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}}^2} \cdot 100\% = \frac{234 \cdot (23{,}93 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{4 \cdot (1{,}4 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 + 234 \cdot (23{,}93 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2} \cdot 100\% = \underline{1{,}7\%}$$

— — — — — — — — — — — —

5.12. a) Ulkoisten voimien impulssi on nolla, joten systeemin liikemäärä säilyy. Täysin kimmoisan törmäyksen sysäyskerroin $e = 1$.

$$\left\{\begin{array}{l} 0{,}90\mathrm{kg} \cdot 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}90\mathrm{kg} \cdot u_1 + 0{,}10\mathrm{kg} \cdot u_2 \\ \dfrac{u_2 - u_1}{3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow u_2 = \underline{5{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \text{ ja } u_1 = \underline{2{,}4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

b) $$0{,}9\mathrm{kg} \cdot 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}9\mathrm{kg} + 0{,}1\mathrm{kg})u \Rightarrow u = \underline{2{,}7\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

c) Sysäyskerroin e=0,70.

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{u_2 - u_1}{3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}70 \\ 0{,}9\mathrm{kg} \cdot 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}9\mathrm{kg} \cdot u_1 + 0{,}1\mathrm{kg} \cdot u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = \underline{2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \\ u_2 = \underline{4{,}6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \end{array}$$

— — — — — — — — — — — —

5.14. a) Ulkoisten voimien impulssi on nolla, joten systeemin liikemäärä säilyy.

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$0{,}10\mathrm{kg} \cdot 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -0{,}10\mathrm{kg} \cdot 1{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0{,}30\mathrm{kg} \cdot u_2 \Rightarrow u_2 = \underline{2{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

b) $$\frac{\Delta E}{E_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}30\mathrm{kg} \cdot (2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1\mathrm{kg} \cdot (1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}1\mathrm{kg} \cdot (5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}1\mathrm{kg} \cdot (5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2} \cdot 100\% = \underline{-48\%}$$

c) $$F = \frac{\Delta p_{\mathrm{A}}}{\Delta t} = \frac{0{,}10\mathrm{kg}(-1{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})}{0{,}010\mathrm{s}} = \underline{60\mathrm{N}}$$

— — — — — — — — — — — —

5.16. a) Systeemin liikemäärä säilyy ja sysäyskerroin e=1

$$\begin{cases} m\cdot 3\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2m\cdot u_1 + m\cdot u_2 \\ \dfrac{u_2 - u_1}{-3\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1 \Rightarrow u_2 = u_1 - 3\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{cases}$$

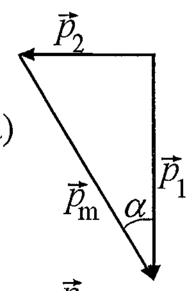
$$m\cdot 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 2m\cdot u_1 + mu_1 - m\cdot 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \Rightarrow \underline{u_1 = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \Rightarrow \underline{\underline{u_2 = -1{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}}.$$

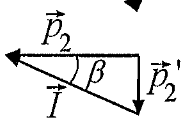
b) Kappaleiden liike-energiat muuttuvat kitkatöiksi, jolloin jarrutusmatkoiksi saadaan

$$\frac{1}{2}\cdot 2mu_1^2 = \mu_\mathrm{k}\cdot 2mg\cdot s_1 \Rightarrow \begin{matrix} s_1 = \dfrac{u_1^2}{2\mu_\mathrm{k} g} = 1{,}02\mathrm{m} \rightarrow \\ s_2 = \dfrac{u_2^2}{2\mu_\mathrm{k} g} = 0{,}255\mathrm{m} \leftarrow \end{matrix} \Rightarrow \text{Välimatka} : \Delta\mathrm{s} = 1{,}3\mathrm{m}$$

— — — — — — — — — — — —

5.18. $m_\mathrm{k} = 10\mathrm{kg}\quad v_1 = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\quad v_2 = 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

a)


b)


a) Systeemin liikemäärä säilyy

$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 + \bar{p}_\mathrm{m}$

$p_1 = m_\mathrm{k}\cdot v_1 = 10\mathrm{kg}\cdot 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 50\mathrm{Ns}$

$p_2 = 10\mathrm{kg}\cdot 3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 30\mathrm{Ns}$

$p_\mathrm{m} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = 58{,}3\mathrm{Ns} \Rightarrow v_\mathrm{m} = \frac{p_\mathrm{m}}{70\mathrm{kg}} = \underline{0{,}83\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$

$\underline{\alpha = 31°\ (\text{etelästä itään})}$

b) Kiinnioton jälkeen : $p'_\mathrm{m} = p_1 = 50\mathrm{Ns} \Rightarrow v'_\mathrm{m} = \frac{50\mathrm{Ns}}{80\mathrm{kg}} = \underline{0{,}63\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ (\text{etelään})}$

$p_2' = m_\mathrm{k} v_\mathrm{m}' = 6{,}25\mathrm{Ns}$

Heitossa impulssilaki : $\bar{p}_2 = \bar{p}_2' + \bar{I} \Rightarrow \beta = \arctan\frac{6{,}25\mathrm{Ns}}{30\mathrm{Ns}} = \underline{12°}.$

— — — — — — — — — — — —

5.20. Törmäyksessä systeemin liikemäärä säilyy ja täysin kimmoisan törmäyksen sysäyskerroin on = 1.

$$\begin{cases} m_1\bar{v}_1 = m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2 & (1) \\ e = \dfrac{u_2 - u_1}{v_1} = 1 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \\ (2) \Rightarrow v_1 = u_2 - u_1 \end{cases}$$

Ratkaistaan näistä u_1

$(1) \Rightarrow v_1^{\ 2} = u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} - 2u_1u_2\cos\alpha$

$(2) \Rightarrow v_1^2 = u_2^{\ 2} + u_1^{\ 2} - 2u_1u_2 = u_1^{\ 2} + u_2^{\ 2} - 2u_1u_2\cos\alpha$

$2u_1u_2 = 2u_1u_2\cos\alpha$

Toteutuu vain, jos $u_1 = 0, u_2 = 0$ tai $\cos\alpha = 1$ eli $\bar{u}_1 \perp \bar{u}_2$.

— — — — — — — — — — — —

5.22. $v_1 = 100$ km/h, $v_2 = -100$ km/h ja $m \ll M$

Suora, keskeinen, täysin kimmoisa törmäys

$$\begin{cases} Mv_1 + mv_2 = Mu_1 + mu_2 \\ \dfrac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = 1 \Rightarrow u_2 - u_1 = v_1 - v_2 \end{cases} \Rightarrow u_1 = u_2 - v_1 + v_2$$

$$Mv_1 + mv_2 = Mu_2 - Mv_1 + Mv_2 + mu_2 \Rightarrow u_2 = \frac{2Mv_1 - Mv_2 + mv_2}{M+m} = \frac{2Mv_1 - (M-m)v_2}{M+m}$$

$$u_2 = \frac{2Mv_1 - Mv_2}{M} = 2v_1 - v_2 = \underline{300\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}$$

— — — — — — — — — — —

5.24. Systeemin liikemäärä säilyy $\Rightarrow$ yhteinen lähtönopeus

$$30\text{kg} \cdot 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = (30\text{kg} + 50\text{kg})u \Rightarrow u = 1{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kitkatyö = liike - energia

$$F_v s = \frac{1}{2}(m_L + m_p)u^2 \Rightarrow F_v = \frac{(m_L + m_p)u^2}{2 \cdot s} = \underline{30\text{N}}$$

— — — — — — — — — — —

5.26. Nopeus, jolla juntta osuu paaluun:

$$\text{Energiaperiaate}: m_1 gh = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} = 7{,}6681\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Juntta ja paalu liikkuvat törmäyksen jälkeen yhteisellä nopeudella u.

$$\text{Liikemäärä säilyy}: m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u \Rightarrow u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 5{,}1121\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Jarruuntumisvaiheessa liike-energia muuttuu kitkatyöksi.

$$\text{Energiaperiaate}: \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = Fs \Rightarrow F = \frac{\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2}{s} = \underline{160\text{kN}}$$

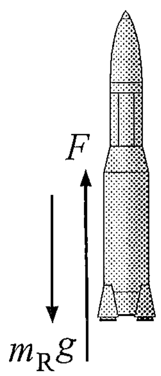
— — — — — — — — — — —

5.28. $m_1 = 420\text{kg}$ $\quad t = 0$ $\quad v_2 = 800\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\quad q_m = 5{,}0\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}$

a) Raketin polttoainesuihkuun kohdistama voima = polttoaineen rakettiin kohdistama voima.

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = v \cdot \frac{dm}{dt} = 800\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5\,\frac{\text{kg}}{\text{s}} = 4 \cdot 10^3\,\text{N}$$

$$m_1 g = 4{,}116 \cdot 10^3\,\text{N}$$



Raketin massa pienenee koko ajan
ja hetkellä $t = 2{,}0\text{s} \quad m_R = 420\text{kg} - 2 \cdot 5\text{kg} = 410\text{kg}$

$\Rightarrow F - m_R g < 0 \Rightarrow \underline{a = 0}$

b) Hetkellä $t = 10\text{s} \quad m_R = 370\text{kg}$

$$\Rightarrow F - m_R g = 4 \cdot 10^3\,\text{N} - 370\text{kg} \cdot 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 374\text{N} \Rightarrow a = \frac{374\text{N}}{370\text{kg}} = \underline{1{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

— — — — — — — — — — —

Luku 6

6.2. $v = 2\pi Rn = 2\pi R \cdot \dfrac{1}{T} = 2\pi \cdot 3{,}84 \cdot 10^8\,\text{m} \cdot \dfrac{1}{27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600\text{s}} = \underline{1{,}0 \cdot 10^3\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}}$

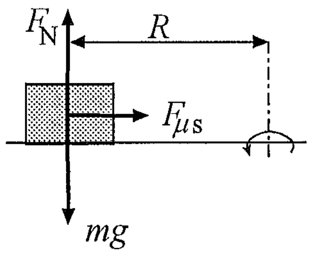
$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{(1{,}0229 \cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{3{,}84 \cdot 10^8\,\text{m}} = \underline{2{,}7 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

— — — — — — — — — — —

6.4. Keskeisvoimana on lepokitka ja kappaleen liikeyhtälö saa muodon

$$\mu_s mg = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow \mu_s = \frac{v^2}{Rg} = \frac{(2\pi R \cdot n)^2}{Rg}$$

$$\Rightarrow \mu_s = \frac{4\pi^2 Rn^2}{g} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}07\text{m} \cdot (\frac{78}{60\text{s}})^2}{9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{0{,}48}$$



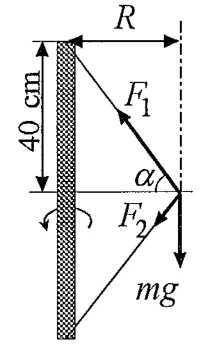
— — — — — — — — — — —

6.6. $R = 30\,\text{cm} \qquad \arctan\alpha = 53{,}1°$

Kuvan perusteella saadaan liikeyhtälöt

$$\begin{cases} x: & F_1 \sin\alpha - F_2 \sin\alpha - mg = 0 \\ y: & F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\alpha = \dfrac{mv^2}{R} \end{cases} \Rightarrow$$

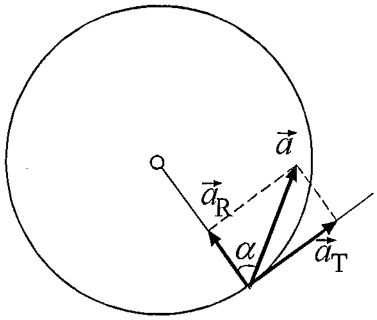
$$F_1 = 1{,}7\text{N} \text{ ja } F_2 = 0{,}50\text{N}$$



— — — — — — — — — — —

6.8.

Suunta:



$$\alpha = \arctan\frac{a_T}{a_R} = \arctan\frac{a_T}{\frac{v^2}{R}} = \arctan\frac{a_T R}{(a_T t)^2}$$

$$= \arctan\frac{R}{a_T t^2} = \arctan\frac{0{,}10\text{m}}{0{,}02\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(3s)^2} = \underline{29°}$$

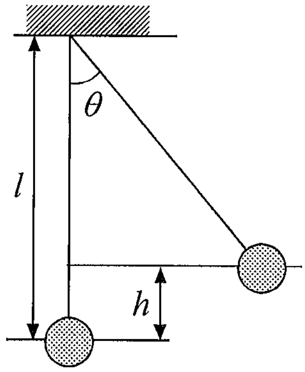
b)

Kappale liikkuu, kun

$\mu_s mg \le ma$

$$\mu_s = \frac{a}{g} = \frac{\sqrt{a_T^2 + a_R^2}}{g} = \frac{\sqrt{a_T^2 + (\frac{v^2}{R})^2}}{g} = \underline{0{,}0042}$$

6.10. a) Energiaperiaatteen mukaisesti kappaleen liike-energia muuttuu potentiaalienergiaksi:



$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2\cdot 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}11480\,\text{m}$$

$$\Rightarrow \arccos\theta = \frac{l-h}{l} = 39{,}6° = \underline{40°}$$

b)

$$F = mg\cos\theta \approx \underline{0{,}76\text{N}}$$

$$\text{Kiihtyvyys}: a = g\sin\theta \approx \underline{6{,}2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

6.12. $M_K = \frac{M_M}{81}$ $\quad R_K = \frac{R_M}{3{,}7}$ $\quad g_K = \frac{g_0}{5{,}9}$

$$F_K = G\frac{MM_K}{R_K^2} = Mg_K$$

$$F_M = G\frac{MM_M}{R_M^2} = Mg_0$$

$$\frac{g_0}{g_K} = \frac{M_M}{R_M^2}\cdot\frac{R_K^2}{M_K} = \frac{M_M\cdot R_K^2}{R_M^2\cdot M_K} = \frac{81}{3{,}7^2} = 5{,}9167 = \underline{5{,}9}$$

6.14. a) Keskeiskiihtyvyyksien erotus päiväntasaajalla ja navoilla:

$$a_P = \frac{v^2}{R} = \frac{(2\pi R \cdot n)^2}{R} = 4\pi^2 R n^2 = 4\pi^2 \cdot 6380 \cdot 10^3 \,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left(\frac{1}{24 \cdot 3600\text{s}}\right)^2 = 0{,}034\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_N = 0$$

$$\Rightarrow \text{erotus } \underline{0{,}034\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

b) $$g = 4\pi^2 R \cdot \frac{1}{T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R}{g} = \frac{4\pi^2 R}{g} = \frac{4\pi^2 \cdot 6380 \cdot 10^3 \,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \Rightarrow T = \underline{1{,}4\text{h}}$$

— — — — — — — — — — —

6.16. Vertaa esimerkki 6.9.

$$\frac{1}{R_m + h} = \frac{1}{R_m} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g_0 R_m^2} = \frac{1}{6380 \cdot 10^3\text{m}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2\,\frac{\text{km}^2}{\text{s}^2}}{9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6380^2\,\text{km}^2} = 31 \cdot 10^{-9}\,\frac{1}{\text{m}}$$

$$\Rightarrow R_m + h = 31{,}85 \cdot 10^6\,\text{m} \Rightarrow h = 25{,}5 \cdot 10^6\,\text{m} \approx \underline{25\,000\text{km}}$$

— — — — — — — — — — —

6.18. Tehtävästä 6.17 saadaan pakonopeuden lauseke

a)

$$\begin{cases} v_{pako} = \sqrt{\dfrac{2GM_m}{R}} \\ g_0 = G\dfrac{M}{R^2} \end{cases} \Rightarrow v_{pako} = \sqrt{\frac{2 \cdot g_0 R^2}{R}} = \sqrt{2 g_0 R}$$

b) $$v_{pako} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6380 \cdot 10^3\,\text{m}} = \underline{11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

— — — — — — — — — — —

6.20. $$G\frac{mM}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} = \frac{2\pi \cdot 422 \cdot 10^6\,\text{m}}{\sqrt{\dfrac{6{,}672 \cdot 10^{-11}\,\text{m} \cdot 6{,}9 \cdot 10^{27}\,\text{kg}}{422 \cdot 10^6\,\text{m} \cdot \text{kg}}}} \approx \underline{1{,}8\,\text{d.}}$$

— — — — — — — — — — —

Luku 7

7.2.

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{60\text{s}} = 0{,}10\frac{1}{\text{s}} \qquad n_1 = \frac{1}{T_1} = 17\cdot 10^{-3}\frac{\text{r}}{\text{s}}$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{3600\text{s}} = 1{,}7\cdot 10^{-3}\frac{1}{\text{s}} \qquad n_2 = \frac{1}{T_2} = 280\cdot 10^{-6}\frac{\text{r}}{\text{s}}$$

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{12\cdot 3600\text{s}} = 150\cdot 10^{-6}\frac{1}{\text{s}} \qquad n_3 = \frac{1}{T_3} = 23\cdot 10^{-6}\frac{\text{r}}{\text{s}}$$

7.4. $a = \frac{v^2}{r}$ ja $v = 2\pi r n \Rightarrow a = \frac{4\pi^2 r^2 n^2}{r} = 4\pi^2 r n^2 \Rightarrow n = \sqrt{\frac{a}{4\pi^2 r}} = \sqrt{\frac{3\cdot 10^5\cdot 9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{4\pi^2\cdot 10^{-2}\text{m}}} = \underline{2{,}7\cdot 10^3\frac{\text{r}}{\text{s}}}$

7.6.

Myötäpäivään $N_1 = n_{k1}t_1$

Vastapäivään $N_2 = n_{k2}(10\text{s} - t_1)$

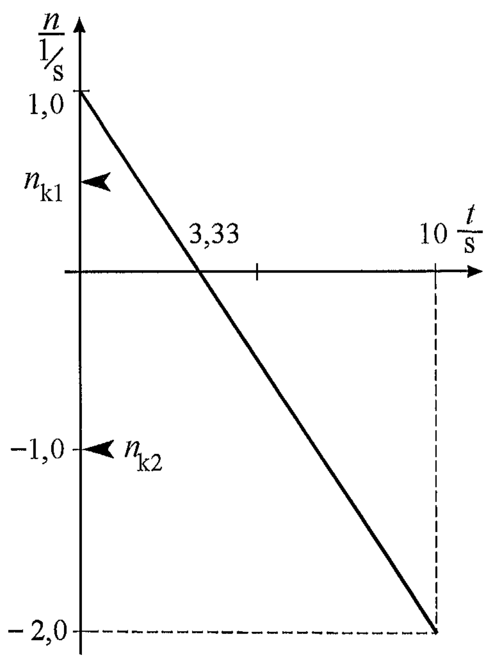
Pyörimissuunta vaihtuu hetkellä t_1

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t} = \frac{-2\pi\cdot 2\frac{1}{\text{s}} - 2\pi\cdot 1\frac{1}{\text{s}}}{10\text{s}} = -\frac{6\pi}{10}\frac{1}{\text{s}^2}$$

$$0 = \omega_1 + \alpha t_1 \Rightarrow t_1 = -\frac{\omega_1}{\alpha} = \frac{-2\pi\cdot 1\frac{1}{\text{s}}}{-\frac{6\pi}{10\text{s}}\frac{1}{\text{s}^2}} = 3{,}33\text{s}$$

$$\Rightarrow N_1 = 0{,}5\frac{\text{r}}{\text{s}}\cdot 3{,}33\text{s} = \underline{1{,}7\text{r}}$$

$$N_2 = 1{,}0\frac{\text{r}}{\text{s}}\cdot 6{,}67\text{s} = \underline{6{,}7\text{r}}$$



7.8. Hihnan nopeus v on sama molempien pyörien kehällä.

$$v = \omega_A R_A = \omega_B R_B \Rightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{R_B}{R_A} = \frac{D_B}{D_A} = \frac{24\text{cm}}{60\text{cm}} = \underline{\frac{2}{5}} \qquad \alpha_A = 0{,}4\pi\frac{1}{\text{s}^2}$$

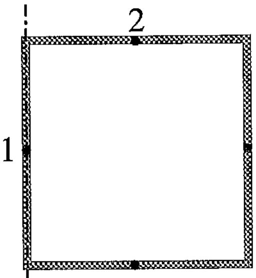
Kun $n_B = 5{,}0\frac{\text{r}}{\text{s}}$ $\quad n_A = \frac{2}{5}\cdot 5\frac{\text{r}}{\text{s}} = 2{,}0\frac{\text{r}}{\text{s}}$ ja $\omega_A = 2\pi\cdot 2{,}0\frac{\text{r}}{\text{s}} = 4\pi\frac{1}{\text{s}} \Rightarrow$ kiihdytysaika

$$\Rightarrow t = \frac{\omega_A}{\alpha_A} = \frac{4\pi\frac{1}{\text{s}}}{0{,}4\pi\frac{1}{\text{s}^2}} = \underline{10\text{s}}$$

7.10. a) $\alpha = \frac{a}{r} = \frac{3{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0{,}375\text{m}} = \underline{8{,}0\frac{1}{\text{s}^2}}$

b) Alin piste $0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ Ylin piste : $v = at = 3{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 2\text{s} = 6{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $v_y = 2v = \underline{12\frac{\text{m}}{\text{s}}}$

7.12. a) Kappaleen hitausmomentti on sen osien hitausmomenttien summa, lisäksi käytetään Steinerin sääntöä.

a) 

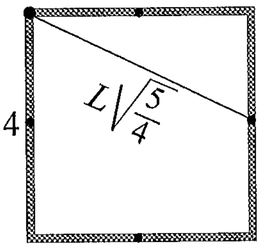
$$J_A = (0+0) + \left(\frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\cdot 2 + (0 + mL^2)$$

$$\Rightarrow J_A = \left(\frac{2\cdot 1}{12} + \frac{2\cdot 1}{4} + 1\right)mL^2 = \underline{\frac{5}{3}mL^2}$$

b) $\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + L^2} = L\sqrt{\frac{1+4}{4}} = L\sqrt{\frac{5}{4}}$

$$J_A = \left[\frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\cdot 2 + \left[\frac{1}{12}mL^2 + m\cdot\left(L\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2\right]\cdot 2$$

$$= \frac{1}{6}mL^2 + \frac{1}{2}mL^2 + \frac{1}{6}mL^2 + \frac{5}{2}mL^2 = \underline{\frac{10}{3}mL^2}$$

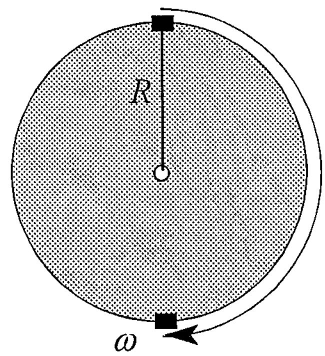
b) 

7.14. Potentiaalienergian muutos on yhtä suuri kuin pyörimisenergian muutos.
Energiaperiaate :

$$mg\cdot 2R = \frac{1}{2}J_A(\omega^2 - \omega_0^{\,2})$$

$$\Rightarrow J_A = \frac{1}{2}m_{\text{l}}R^2 + m_{\text{k}}R^2 = 0{,}714\text{kgm}^2$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} + \frac{4m_{\text{k}}gR}{J_A}} = \underline{4{,}8\frac{1}{\text{s}}}$$



7.16. Pyörimisliikkeen perusyhtälön mukaan

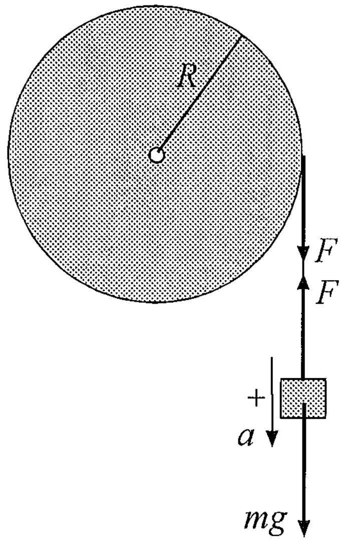
$$M_A = J_A\alpha = J_A\cdot\frac{\omega}{t} = 0{,}12\text{kgm}^2\cdot\frac{2\pi\cdot 15\frac{1}{\text{s}}}{5{,}0\text{s}} = \underline{2{,}3\text{Nm}}$$

7.18. Kirjoitetaan liikeyhtälöt ja pyörimisliikkeen perusyhtälö:

Kappale : $mg - F = ma$ (1)

Sylinteri : $FR = J_A \alpha$ (2)

$a = \alpha R$ (3)



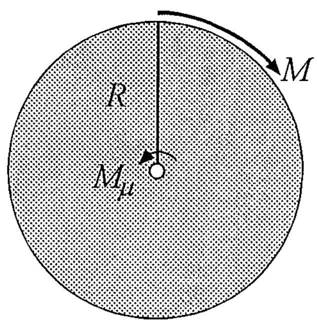
$$(2) \text{ ja } (3) \Rightarrow: FR = \frac{1}{2} m_S R^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow F = \frac{1}{2} m_S a$$

$$\text{sij. } (1) : \text{een} \Rightarrow mg - \frac{1}{2} m_S a = ma \Rightarrow a = \frac{mg}{½ m_S + m} = 4{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{a}{R} = 24{,}5 \frac{1}{\text{s}^2} = \underline{25 \frac{1}{\text{s}^2}}$$

— — — — — — — — — — — —

7.20. a) Pyörimisliikkeen perusyhtälön mukaan



$$\begin{cases} \text{Kiihdytys} : M - M_\mu = J_A \alpha_1 = J_A \frac{\omega - 0}{t_1} = J_A \cdot \frac{\omega}{t_1} = J_A \cdot \frac{2\pi n}{t_1} \\ \text{Jarrutus} : -M_\mu = J_A \alpha_2 = J_A \frac{0 - \omega}{t_2} = -J_A \cdot \frac{2\pi n}{t_2} \end{cases}$$

$$M = J_A \left(\frac{2\pi n}{t_1} + \frac{2\pi n}{t_2}\right) \Rightarrow J_A = \frac{M}{2\pi n\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)} = \underline{4{,}5 \text{kgm}^2}$$

b) $|M_\mu| = J_A \cdot \frac{2\pi n}{t_2} = \underline{0{,}91 \text{Nm}}$

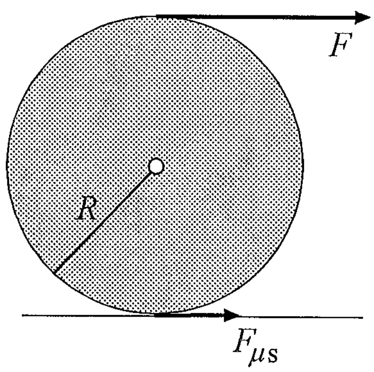
c) $\varphi = \omega_{k1} t_1 + \omega_{k2} t_2 = \frac{0 + \omega}{2} t_1 + \frac{\omega + 0}{2} \cdot t_2 = \frac{2\pi n}{2} \cdot t_1 + \frac{2\pi n}{2} \cdot t_2 = 276{,}46 \text{rad}$

Kierroksia $\frac{276}{2\pi} = \underline{44}$

— — — — — — — — — — — —

7.22. Liukumatta

$$\begin{cases} F + F_{\mu s} = ma \ (1) \\ (F - F_{\mu s}) r = \frac{1}{2} m r^2 \cdot \alpha \ (2) \\ \alpha = \frac{a}{r} \text{ sij } (2) : \text{een} \end{cases}$$



$$\begin{cases} F + F_{\mu s} = ma \\ F - F_{\mu s} = \frac{1}{2} m r \cdot \frac{a}{r} = \frac{1}{2} ma \end{cases} \Bigg| +$$

$$2F = ma + \frac{1}{2}ma = \frac{3}{2}ma \Rightarrow a = \frac{4F}{3m}$$

$$\Rightarrow F_{\mu s} = ma - F = \frac{m \cdot 4F}{3m} - F = \frac{F}{3}$$

Lepokitkakerroin : $F_{\mu s} \leq \mu_s N = \mu_s mg$

Liukumatta, kun $F_{\mu s} = \frac{F}{3} \leq \mu_s mg$ eli $F \leq 3\mu_s mg = 11{,}76\text{N} = F_0$

Liukuen, jos $F > F_0$

a) $F = 6{,}0\text{N} < F_0 \Rightarrow a = \underline{4{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}, \alpha = \underline{20\frac{1}{\text{s}^2}}$

b) $F = 16{,}0\text{N} > F_0 \Rightarrow$ liukuen

$$\begin{cases} F + F_{\mu s} = ma (1) \\ (F - F_{\mu s})r = \frac{1}{2}mr^2 \cdot \alpha (2) \\ F_{\mu} = \mu_k N = \mu_k mg (3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow a = \frac{F}{m} + \mu_k g$$

$$(2) \Rightarrow \alpha = \frac{2(F - \mu_k mg)}{mr}$$

$$\Rightarrow \underline{a = 9{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \qquad \underline{\alpha = 65\frac{1}{\text{s}^2}}$$

— — — — — — — — — — — —

7.24.

$$\begin{cases} F_T - \mu F_N = 0 \\ F_N - mg - \mu F_T = 0 \end{cases} \Rightarrow F_N = \frac{mg}{1-\mu^2}; F_T = \frac{\mu mg}{1-\mu^2}$$

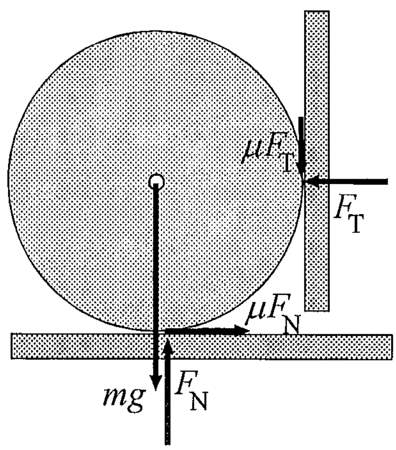
$$\Rightarrow F_N - F_T = \frac{mg}{1+\mu}$$

Momenttiyhtälö A : n suhteen

$$\mu F_N R - \mu F_T R = \frac{1}{2}mR^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2\mu}{1+\mu} \cdot \frac{g}{R}$$

a) $a_T = \alpha R = \frac{2\mu g}{1+\mu}; v = a_T t \Rightarrow$

$$t = \frac{v}{a_T} = \frac{(1+\mu)v}{2\mu g} = 0{,}714\text{s} = \underline{0{,}71\text{s}}$$



b) Silloin $\begin{cases} \mu F_N - F_T = 0 \\ \mu F_N R - \mu F_T R = 0 \end{cases} \Rightarrow F_N = F_T = \underline{0}$

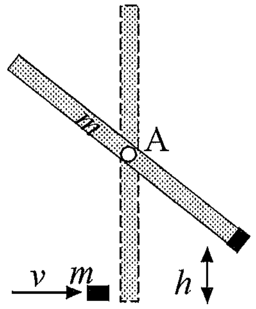
— — — — — — — — — — — —

7.26. a)

Törmäyksessä liikemäärämomentti L säilyy :

$$\text{Uusi } J_A = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)mL^2 = \frac{4}{12}mL^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

$$mv\frac{L}{2} = J_A\omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{mvL}{2J_A} = \frac{mvL\cdot 3}{2\cdot mL^2} = \frac{3v}{2L} \approx \underline{3{,}8\frac{1}{s}}$$



b) Pyörimisenergia on tällöin muuttunut kokonaan potentiaalienergiaksi.

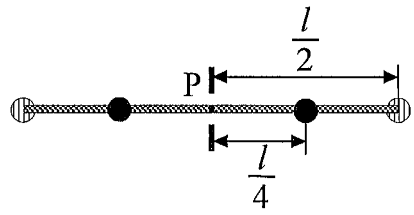
$$\frac{1}{2}J_A\omega^2 = mgh$$

$$\frac{1}{6}mL^2\omega^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{L^2\omega^2}{6g} = 0{,}1557 \Rightarrow \theta = 51{,}8° \approx \underline{52°}$$

— — — — — — — — — — — —

7.28. a) Ulkoisten voimien momenttien impulssi on nolla, joten

Systeemin liikemäärämomentti säilyy :



$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

$$\left(\frac{1}{12}m_s l^2 + 2m\left(\frac{l}{4}\right)^2\right)2\pi n_1 = \left(\frac{1}{12}m_s l^2 + 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)2\pi n_2$$

$$\Rightarrow n_2 = \underline{6{,}0\frac{\text{r}}{\text{min}}}$$

b)

$$E_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_1 4\pi^2 n^2 = 0{,}25\text{mJ}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = 0{,}10\text{mJ}$$

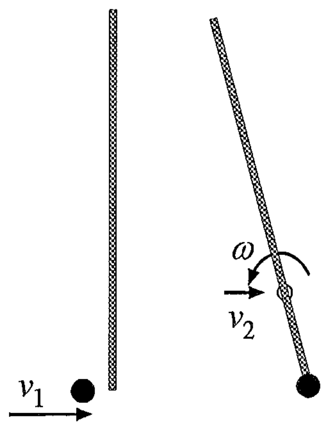
c) $\omega_2 = 2\pi n_2 = 0{,}63\frac{1}{s}$

— — — — — — — — — — — —

7.30. a) Liikemäärä ennen törmäystä $\bar{p}_1 = m\bar{v}_1$

Liikemäärä törmäyksen jälkeen $\bar{p}_2 = 2m\bar{v}_2$

$$mv_1 = 2mv_2 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{2}v_1 = \underline{2{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$



b)

Systeemi : sauva + kappale, ulkoisten voimien momentti $M = 0$

$\Rightarrow$ systeemin L säilyy

Uusi painopiste :

$$x_p = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m\frac{l}{2}+ml}{2m} = \frac{3l}{2\cdot 2} = \frac{3}{4}l$$

$$(1)\ mv_1\cdot\frac{1}{4}l = J_p\omega \Rightarrow J_p = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{5}{24}ml^2$$

$$(1) \Rightarrow \omega = \frac{mv_1 l \cdot 24}{4 \cdot 5 \cdot ml^2} = \frac{6v_1}{5l} = \underline{6{,}0\,\frac{1}{\mathrm{s}}}$$

c) $\dfrac{E_{\mathrm{rot}} + E_{\mathrm{kin2}}}{E_{\mathrm{kin1}}} = \dfrac{½J\omega^2 + ½ \cdot 2mv_2^2}{½mv_1^2} = 0{,}80$ eli 20% muuttui muuhun muotoon.

7.32. Tehtävässä 7.31 $h = \dfrac{J_{\mathrm{A}}}{mr_{\mathrm{p}}}$

a)

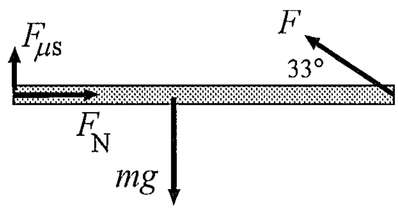
$$\begin{cases} J_{\mathrm{A}} = \frac{1}{3}mL^2 \\ r_{\mathrm{p}} = \frac{L}{2} \end{cases} \Rightarrow h = \frac{\frac{1}{3}mL^2}{m \cdot \frac{L}{2}} = \underline{\frac{2}{3}L}\ \mathrm{b)}$$

$$J_{\mathrm{A}} = \frac{1}{3}m \cdot (3r)^2 + (\frac{1}{2}mr^2 + m \cdot (4r)^2) = \frac{39}{2}m\,r^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{\frac{39}{2}mr^2}{2m \cdot \frac{11}{4}r} = \frac{39 \cdot 4}{11 \cdot 2}r = \underline{\frac{39}{11}r}$$

7.34.

a) $mg\frac{1}{2} = F\sin 33° \cdot L \Rightarrow F = \dfrac{mg}{2\sin 33°} = 26{,}99\mathrm{N} = \underline{27\mathrm{N}}$



b) $F_{\mathrm{N}} = F\cos 33°, F_{\mu s} = mg - F\sin 33°$
$\Rightarrow F_{\mathrm{S}} = 26{,}99\mathrm{N} = \underline{27\mathrm{N}}$

c) $F_{\mu s} \le F_{\mu s} \cdot F_{\mathrm{N}} \Rightarrow \mu_s \ge \dfrac{F_{\mu s}}{N} = 0{,}6494 = \underline{0{,}65}$

7.36. a)

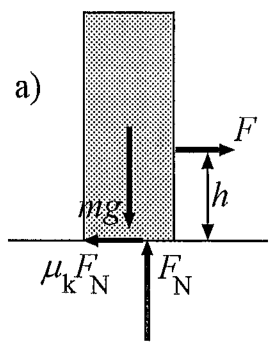
$$\begin{cases} x: F - \mu_{\mathrm{k}}F_{\mathrm{N}} = 0 \quad (1) \\ y: F_{\mathrm{N}} - mg = 0 \quad (2) \\ M_{\mathrm{A}}: F \cdot h + F_{\mathrm{N}} \cdot (0{,}4\mathrm{m} - x) - mg \cdot 0{,}40\mathrm{m} = 0 \quad (3) \end{cases}$$

(1) ja (2) $\Rightarrow F = \mu_{\mathrm{k}}F_{\mathrm{N}} = \mu_{\mathrm{k}}mg$

(3) $\Rightarrow \mu_{\mathrm{k}}mg \cdot h + mg(0{,}4\mathrm{m} - x) - mg \cdot 0{,}4\mathrm{m} = 0$

$\Rightarrow \mu_{\mathrm{k}} \cdot 0{,}80\mathrm{m} + 0{,}4\mathrm{m} - x - 0{,}4\mathrm{m} = 0 \Rightarrow x = \mu_{\mathrm{k}} \cdot 0{,}8\mathrm{m} = \underline{0{,}20\mathrm{m}}$

a)

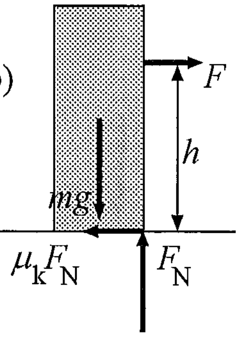


b)

$$\begin{cases} x: F-\mu_k F_N = 0 \\ y: F_N + mg = 0 \qquad \Rightarrow \mu_k h - mg\cdot 0{,}40\text{m} = 0 \\ M_A: Fh - mg\cdot 0{,}40\text{m} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu_k h - 0{,}40\text{m} = 0 \Rightarrow h = \frac{0{,}40\text{m}}{\mu_k} = \frac{0{,}40\text{m}}{0{,}25} = \underline{1{,}6\text{m}}$$

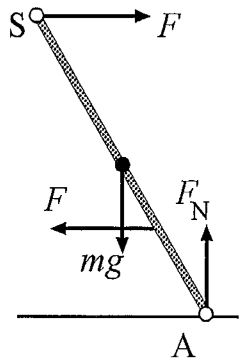
b)



7.38. a) Tikkaan puoliskot ovat symmetriset ja tukivoima F_N on tikkaan puoliskon painovoima $mg = 147$ N. Nivelessä ja köydessä olevat rasitukset ovat vaakasuorat ja yhtä suuret. Nivelpisteen S suhteen saadaan tikkaan oikealle puoliskolle kuvasta momenttiyhtälö

$$F_N \cdot 4{,}8\,\text{m}\cdot\sin 30° - mg\cdot 2{,}4\,\text{m}\cdot\sin 30° - F\cdot 3{,}2\,\text{m}\cdot\cos 30° = 0$$

$$\Rightarrow \; F = \underline{64\,\text{N}}.$$



b) Mies seisoo tikkailla 1/3 osan etäisyydellä A:sta, joten miehen painovoimasta $m_1 g = 735\,\text{N}$ tulee 2/3 tukipisteeseen A ja 1/3 vasemman tikaspuoliskon tukipisteeseen. Tukipisteessä A on siten $F_N = 147\,\text{N} + 490\,\text{N} = 637\,\text{N}$ Nivelen y-voimaksi saadaan oikean puolen y-tasapainosta

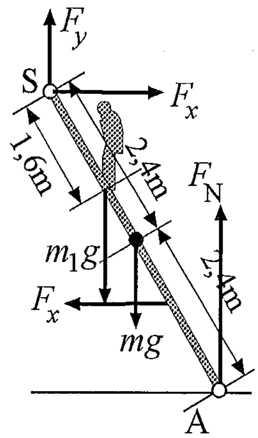
$$F_y + 637\,\text{N} - 147\,\text{N} - 735\,\text{N} = 0 \;\Rightarrow\; F_y = 245\,\text{N}$$

Nivelen ja köyden x-rasitukset ovat yhtä suuret. Momenttiyhtälöksi saadaan nyt

$$+637\,\text{N}\cdot 4{,}8\,\text{m}\cdot\sin 30° - 147\,\text{N}\cdot 2{,}4\,\text{m}\cdot\sin 30°$$
$$-735\,\text{N}\cdot 1{,}6\,\text{m}\cdot\sin 30° - F_x\cdot 3{,}2\,\text{m}\cdot\cos 30° = 0$$

Nivelen voima on

$$\sqrt{276^2+245^2}\,\text{N} = \underline{370\,\text{N}} \quad \text{suuntaan} \quad \varphi = \text{atn}\frac{245}{276} = \underline{42°}.$$



Luku 8

8.2. Suurinta sallittua jännitystä vastaava voima

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A} \Rightarrow F_{\max} = \sigma_{\max} \cdot A = 130 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 100 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2 \Rightarrow F_{\max} = \underline{13\text{kN}}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{EA} = \frac{13 \cdot 10^3\,\text{N}}{210 \cdot 10^9\,\text{Pa} \cdot 100 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2} = 620 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \text{muutos on } \underline{0{,}062\%}$$

— — — — — — — — — — —

8.4. Suhteellinen venymä on Hooken lain mukaa $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$.

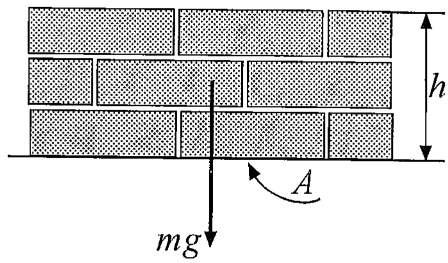
Nyt $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, joten $\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\varepsilon_2}{E_2} \Rightarrow$ Jännityksien suhde: $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{210\text{GPa}}{70\text{GPa}} = \underline{3}$

— — — — — — — — — — —

8.6. Seinän massa $m = \rho V = \rho A h$
ja puristava voima on silloin $mg = \rho A h g$

$$\sigma_{\max} = \frac{F_{\max}}{A} \Rightarrow F_{\max} = \sigma_{\max} \cdot A$$

$$\rho A h_{\max} \cdot g = \sigma_{\max} \cdot A \Rightarrow h_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{\rho \cdot g} = \frac{0{,}50 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{34\text{m}}$$



— — — — — — — — — — —

8.8. Puristusjännitys

$$\sigma_p = \frac{F}{A} = \frac{F4}{\pi D^2} \qquad \sigma_p = 380 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \qquad F = 5{,}0 \cdot 10^3\,\text{N}$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{4F}{\pi \sigma_p}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5 \cdot 10^3\,\text{N}}{\pi \cdot 380 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}} = \underline{4{,}09 \cdot 10^{-3}\,\text{m}} = \underline{4{,}1\text{mm}}$$

— — — — — — — — — — —

8.10. Kaikkien niittien yhteinen pinta-ala $A = NA_1 = N \cdot 15 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2$

Leikkausjännitys

$$\tau_{\max} = \frac{F}{NA} = \frac{\tau_E}{10} \quad \text{josta } N = \frac{10F}{A_1 \cdot \tau_E} = \frac{10 \cdot 12 \cdot 10^3\,\text{N}}{15 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2 \cdot 1{,}30 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 61{,}5 = 62 \text{ kpl}$$

— — — — — — — — — — —

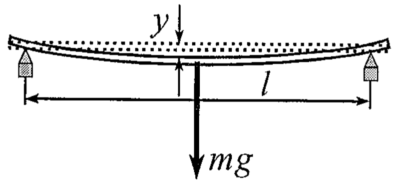
8.12. Tilavuuskimmoisuuden lausekkeesta saadaan

$$\Delta V = \kappa \cdot p_e V = 15 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}^2}{\text{N}} \cdot 1{,}4\text{dm}^3 = \underline{1{,}05 \cdot 10^{-2}\text{dm}^3} = \underline{10{,}5\text{cm}^3}$$

— — — — — — — — — — — —

8.14.

Sauvan massa ei tarvitse ottaa huomioon, joten



taipuma $y = \dfrac{l^3 F}{48EI_A}$, voima $F = mg$ ja aksiaalinen

pintamomentti $I_A = \dfrac{\pi D^4}{64}$ jolloin

$$E = \frac{64 l^3 mg}{48 y \pi D^4} = \frac{64 \cdot (0{,}75)^3 \text{m}^3 \cdot 2{,}5\text{kg} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{48 \cdot 12 \cdot 10^{-3}\text{m} \cdot \pi \cdot (12 \cdot 10^{-3})^4 \text{m}^4} = \underline{17{,}6 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}$$

— — — — — — — — — — — —

8.16. Vääntömomentin ja kiertymiskulman välinen yhteys on

$$M = \frac{\pi G D^4}{32 e} \cdot \theta \Rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{32M}{\pi G \cdot \frac{\theta}{e}}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 43 \cdot 10^3 \text{Nm}}{\pi \cdot 85 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{0{,}25\pi}{180\text{m}}}} = \underline{0{,}185\text{m}}$$

— — — — — — — — — — — —

Luku 9

9.2. Veden aiheuttama paine syvyydellä h

$$p_h = \rho g h \Rightarrow h = \frac{p_h}{\rho g} = \frac{6{,}2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \underline{61\text{m}}$$

— — — — — — — — — — — —

9.4. Momenttitasapaino nivelen suhteen

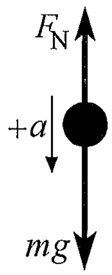
$F_2 \cdot 80\text{mm} = 20\text{N} \cdot 600\text{mm}$

Hydrauliselle puristimelle pätee $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{A_1}{A_2} = (\dfrac{d_1}{d_2})^2 \Rightarrow$

$$F_1 = (\frac{d_1}{d_2})^2 \cdot F_2 = (\frac{150\text{mm}}{20\text{mm}})^2 \cdot \frac{20\text{N} \cdot 600\text{mm}}{80\text{mm}} = \underline{8{,}4\text{kN}}$$

— — — — — — — — — — — —

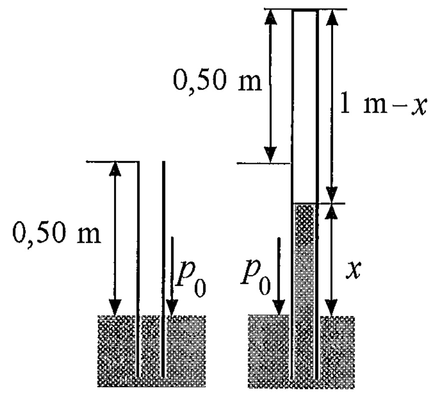
9.6. Palloon kohdistuvien voimien summa = massa kertaa kiihtyvyys



$$\rho_{st} \cdot Vg - \rho_v \cdot Vg = \rho_{st} \cdot V \cdot a \Rightarrow a = \frac{\rho_{st} - \rho_v}{\rho_{st}} g$$

$$= \frac{7830 \frac{kg}{m^3} - 1000 \frac{kg}{m^3}}{7830 \frac{kg}{m^3}} \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = \underline{8{,}56 \frac{m}{s^2}}$$

9.8.



Boylen laki :

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$0{,}50\text{m} \cdot A \cdot 10^5 \text{Pa} = (1\text{m} - x)Ap$$

$$\begin{cases} 0{,}50\text{m} \cdot 10^5 \text{Pa} = (1\text{m} - x)p \\ p = 10^5 \text{Pa} - \rho g x \end{cases}$$

$$0{,}50\text{m} \cdot 10^5 \text{Pa} = (1 - x)(10^5 \text{Pa} - 1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} \cdot x)$$

$$\Rightarrow x = 0{,}476\text{m} = \underline{47\text{cm}}$$

9.10. Reunaviivan pituus on $2l$ (lasien etäisyyttä ei tarvitse ottaa huomioon)

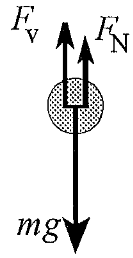
$$mg = \rho dlhg = 2l\sigma$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\sigma}{\rho hg} = \frac{2 \cdot 73 \cdot 10^{-3} \frac{N}{m}}{1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2}} = 1{,}490 \cdot 10^{-2} \text{m} = \underline{15\text{mm.}}$$

9.12. $p_a = \frac{4\sigma}{r} = \frac{4 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \frac{N}{m^2}}{10^{-2} \text{m}} = 10\text{Pa}$ $\quad p_1 = \frac{4{,}25 \cdot 10^{3} \frac{N}{m^2}}{4 \cdot 10^{-2} \text{m}} = \underline{2{,}5\text{Pa}}$

9.14. $\sigma \cdot 2\pi r = \rho \pi r^2 hg \Rightarrow h = \frac{2\sigma}{\rho r g} = \frac{2 \cdot 73 \cdot 10^{-3} \frac{kgm}{ms^2}}{1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}20 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2}} = 7{,}4 \cdot 10^{-2} \text{m} = \underline{7{,}4\text{cm}}$

9.16. Pisaraan kohdistuvien voimien summa = 0, kun rajanopeus on saavutettu.



$$6\pi r\eta v + \rho_i \cdot \frac{4\pi r^3}{3} g - \rho_v \cdot \frac{4\pi r^3}{3} g = 0$$

$$r = \sqrt{\frac{18\eta v}{4(\rho_v - \rho_i)g}} = \sqrt{\frac{18 \cdot 0{,}0182 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{s} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4 \cdot 998{,}8\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}$$

$$= 6{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} = \underline{6{,}5\,\mu\mathrm{m}}$$

9.18. $$M = \frac{\pi R^4 \omega M}{2d} = \frac{\pi \cdot 0{,}15^4\,\mathrm{m}^4 \cdot 10{,}0\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 1{,}0\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{ms}}}{2 \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}} = \underline{79{,}5\,\mathrm{Nm}}$$

$$P = M\omega = 79{,}5\,\mathrm{Nm} \cdot 10{,}0\,\frac{1}{\mathrm{s}} = \underline{800\,\mathrm{W}}$$

9.20. Reynoldsin luku on laminaarissa virtauksessa

$$N_R = \frac{\rho VD}{\eta} < 2000$$

$$\Rightarrow \text{tilavuusvirta } q_V = AV = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{2000 \cdot \eta}{\rho D} = \frac{\pi \cdot 0{,}1\mathrm{m} \cdot 2000 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot \mathrm{s}\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2}}{4 \cdot 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = \underline{1{,}67 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}}$$

$$\text{ja paine-ero } \Delta p = \frac{128\eta l q_V}{\pi D^4} = \frac{128 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\,\mathrm{s} \cdot 1000\mathrm{m} \cdot 1{,}57 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}}{\pi \cdot (0{,}1)^4\,\mathrm{m}^4} = \underline{64\,\mathrm{Pa}}$$

9.22. $$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \rho_1 g h}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 790\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9{,}8\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}12\mathrm{m}}{1{,}15\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} = \underline{40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \underline{145\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}$$

9.24. Vertaa esimerkki 9-14.

$$\frac{1}{2}c_{\mathrm{w}}\frac{\pi D^2}{4}\cdot\rho\cdot v^2 = mg$$

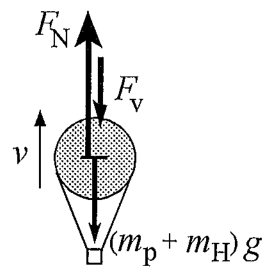
$$v=\sqrt{\frac{4mg}{\frac{1}{2}c_{\mathrm{w}}\pi D^2\rho}}=\sqrt{\frac{4\cdot 92\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}75\cdot\pi\cdot 6^2\mathrm{m}^2\cdot 1{,}20\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}}=\underline{6{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

9.26. Kun rajanopeus on saavutettu, voimien summa =0

$$\rho_i\frac{4\pi r^3}{3}g-\rho_{\mathrm{H}}\cdot\frac{4\pi r^3}{3}g-m_{\mathrm{p}}g-\frac{1}{2}c_{\mathrm{W}}A\rho_{\mathrm{i}}v^2=0 \qquad A=\pi r^2$$

Sijoitetaan A ja ratkaistaan v

$$v=\sqrt{\frac{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3\cdot g\cdot(\rho_{\mathrm{i}}-\rho_{\mathrm{H}})-m_{\mathrm{p}}\,g}{\frac{1}{2}\cdot c_{\mathrm{W}}\cdot\pi\cdot r^2\cdot\rho_{\mathrm{i}}}}=\underline{7{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}.$$



9.28.

$$\begin{cases} P_1=F_1v_1=\frac{1}{2}c_{\mathrm{w}}A\rho v_1{}^2\cdot v_1=Kv_1{}^3 \\ P_2=Kv_2{}^3\end{cases}\Rightarrow\frac{P_1}{P_2}=\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^3\Rightarrow P_2=\frac{2{,}5\mathrm{kW}}{(10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^3}\cdot(25\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^3=\underline{39\mathrm{kW}}.$$

$$v_{\mathrm{k}}=\sqrt[3]{\frac{P_{\mathrm{h}}}{P_1}}=\sqrt[3]{\frac{0{,}6\cdot 75}{2{,}5}}\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=\underline{26{,}2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}=\underline{94\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}$$

9.30. Teho $P=\frac{W}{t}=\frac{\text{potentiaalienergian muutos}}{\text{aika}}+\frac{\text{liike - energianmuutos}}{\text{aika}}$

$$P=q_{\mathrm{m}}gh+\frac{1}{2}q_{\mathrm{m}}v^2 \quad\text{ja}\quad v=\frac{q_{\mathrm{m}}}{\rho A}=\frac{10\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\cdot 4}{1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\cdot\pi\cdot(0{,}02\mathrm{m})^2}=31{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

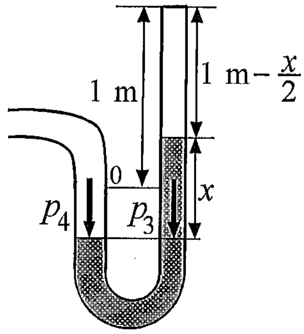
$$\Rightarrow p=10\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\cdot 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 20\mathrm{m}+\frac{1}{2}\cdot 10\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\cdot(31{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}=\underline{7{,}0\mathrm{kW}}$$

9.32. Boylen laista

$$p_1V_1 = p_2V_2 \Rightarrow 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot A = p_2\cdot(1-\frac{x}{2})A$$

$$p_3 = (\rho g x + p_2)$$

$$p_4 = 2{,}5\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$$



$$\left.\begin{aligned} 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 1\mathrm{m} &= p_2(1-\frac{x}{2}) \quad (1)\\ 2{,}5\cdot 10^5\,\mathrm{Pa} &= \rho g x + p_2 \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow p_2 = 2{,}5\cdot 10^5 - \rho g x \text{ sij.yht.}(1)$$

$$\Rightarrow 10^5 = (2{,}5\cdot 10^5 - \rho g x)(1-\frac{x}{2}) \Rightarrow x = \underline{71\,\mathrm{cm}}$$

Luku 10

10.2. Koska messinki laajenee enemmän kuin teräs, on molempia lämmitettävä. Kun messinkiputki on laajentunut 0,015 mm enemmän kuin teräs, terästanko mahtuu messinkiputken sisään. (Tämä on ns. kutistusliitos tai puristusliitos.) Taulukosta 1 saadaan α:t.

$$\alpha_{\mathrm{Me}}\cdot l_{20}\cdot\Delta t = \alpha_{\mathrm{St}}\cdot l_{20}\cdot\Delta t + 0{,}015\,\mathrm{mm} \;\Rightarrow\; \Delta t = \frac{0{,}015\,\mathrm{mm}}{(20-12)\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}\cdot 60\,\mathrm{mm}} = 31{,}25\,^\circ\mathrm{C}.$$

Tulos: 20 °C + 31,25 °C ≤ <u>52 °C</u>.

— — — — — — — — — — — —

10.4. Lämpötilan aleneminen merkitsee vetojännitystä. Lämpöjännitykselle $\frac{F}{A} = E\,\alpha\,|\,\Delta t\,|$.

Massa $m = V\rho = l A \rho \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{m}{l}$. Taulukossa 1 ovat teräksen arvot ja saadaan

$$F = \frac{\mathrm{m}^3}{7830\,\mathrm{kg}}\cdot 54\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\cdot 210\cdot 10^9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot 12\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{^\circ\mathrm{C}}\cdot(20-(-20))\,^\circ\mathrm{C} = \underline{700\,\mathrm{kN}}.$$

— — — — — — — — — — — —

10.6. Glyseriinin ja pullon tilavuuksien muutosten erotus valuu yli.

$$\Delta V_{\mathrm{Gl}} - \Delta V_{\mathrm{Pe}} = (\gamma_{\mathrm{Gl}} - 3\alpha_{\mathrm{Pe}})\cdot V\cdot(t_{50} - t_{10}) = -0{,}022\,\mathrm{dm}^3.$$

Negatiivinen tulos merkitsee, että polyeteenipullo laajenee enemmän kuin glyseriini, <u>eikä yhtään valu yli</u>.

— — — — — — — — — — — —

10.8. VDI-höyrytaulusta saadaan puhtaan veden tiheyden arvoiksi

$\rho_0 = 0{,}99984\,\mathrm{kg/m}^3$ $\rho_4 = 0{,}99997\,\mathrm{kg/m}^3$

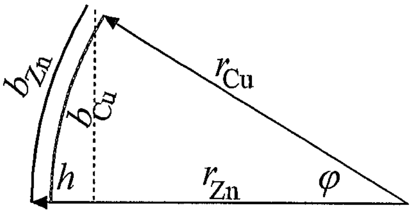
$\rho_6 = 0{,}99994\,\mathrm{kg/m}^3$ $\rho_{10} = 0{,}99970\,\mathrm{kg/m}^3$

Sijoittamalla arvoparit vuorotellen yhtälöön $\gamma = -\dfrac{\Delta\rho}{\rho\cdot\Delta t}$ saadaan tulokset

a) $-33\cdot10^{-6}$ 1/° C ja b) $60\cdot10^{-6}$ 1/° C. Kun arvot otetaan kuvasta 10-8 sallitaan annettuihin tuloksiin max 20% poikkeamaa.

— — — — — — — — — — —

10.10. Kupari- ja sinkkiliuskat kaareutuvat ympyränkaariksi, joiden pituuksiksi saadaan



$$b_{Zn} = \varphi\, r_{Zn} = 100\,\text{mm}\cdot(1+26\cdot10^{-6}\cdot10)$$

$$b_{Cu} = \varphi\, r_{Cu} = 100\,\text{mm}\cdot(1+17\cdot10^{-6}\cdot10)$$

Liuskat olivat 3 mm etäisyydellä toistaan, joka on kaarien säteiden erotus. Kaarien pituuksien erotukselle saadaan

$$b_{Zn} - b_{Cu} = \varphi\cdot3\,\text{mm} = 100\,\text{mm}\cdot(26-17)\cdot10^{-6}\cdot10$$

Tästä saadaan $\varphi = 0{,}003$ rad ja edelleen $r_{Cu} = \dfrac{100\text{ mm}}{0{,}003} = 33300$ mm

Ympyrässä $h = r(1-\cos\varphi) = 33300\text{mm}\cdot(1-\cos 0{,}003) = \underline{0{,}15\text{mm}}.$

— — — — — — — — — — —

10.12. Puristuksessa tilanyhtälöstä ratkaistaan loppulämpötila.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{V_2}{V_1}\cdot T_1 = \frac{60\,\text{bar}}{0{,}98\,\text{bar}}\cdot\frac{1}{20}\cdot290\,\text{K}(=888\,\text{K}) = \underline{890\,\text{K}}.$$

Isobaarisen muutoksen yhtälöstä saadaan lämpötila laajenemisen jälkeen

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{T_2}{T_3} \Rightarrow T_3 = \frac{V_3}{V_2}\cdot T_2 = \frac{2{,}5}{1}\cdot888\,\text{K} = \underline{2200\,\text{K}}.$$

— — — — — — — — — — —

10.14. Tilavuus on vakio. Silloin $p_2 = \dfrac{T_2}{T_1}\cdot p_1 = \dfrac{(273-30)\,\text{K}}{273\,\text{K}}\cdot1\,\text{bar} = 0{,}890\,\text{bar}$

Alipaine pakastehuoneessa on 1 bar – 0,890 bar = $\underline{0{,}110\text{ bar}}$.

Katon pinta-ala $A = 1{,}5^2\ \text{m}^2 = 2{,}25\,\text{m}^2$.

Kattoon aiheutuva voima $F = p_e\, A = 0{,}110\cdot10^5\,\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}\cdot2{,}25\,\text{m}^2 = \underline{25\,\text{kN}}.$

— — — — — — — — — — —

10.16. Kaasujen tilanyhtälöstä $pV = nRT = \dfrac{m}{M}RT$ saadaan osapaineeksi

$$p = \frac{mRT}{MV} = \frac{0{,}436\cdot10^{-3}\,\text{kg}\cdot8{,}31\,\text{Nm}\ \cdot\ 293\,\text{K}}{44\cdot10^{-3}\,\dfrac{\text{kg}}{\text{mol}}\cdot\text{mol}\cdot\text{K}\ \cdot1{,}0\cdot10^{-3}\,\text{m}^3} = \underline{24\,\text{kPa}}.$$

— — — — — — — — — — —

10.18. Lasketaan moolimäärä n ja moolissa on N_A molekyyliä. Molekyylien lukumäärä

on $$N = nN_A = \frac{pV}{RT}\cdot N_A = \frac{1{,}2\cdot 10^{-21}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\cdot 1\,\text{m}^3}{8{,}31\frac{\text{N m}}{\text{mol K}}\cdot 3\,\text{K}}\cdot 6{,}0\cdot 10^{22}\,\frac{\text{molekyyliä}}{\text{mol}} = \underline{29\text{ molekyyliä}}.$$

— — — — — — — — — — — —

10.20. Isotooppien tehollisten nopeuksien suhteeksi saadaan

$$\frac{v_3}{v_4} = \sqrt{\frac{3RT/M_3}{3RT/M_4}} = \sqrt{\frac{M_4}{M_3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \underline{1{,}15}.$$

— — — — — — — — — — — —

10.22. $$\frac{v_2}{v_1} = \frac{2\cdot v_1}{v_1} = \sqrt{\frac{3RT_2/M}{3RT_1/M}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = 4 \qquad \underline{4\text{-kertaiseksi}}.$$

Luku 11

11.2. Liike-energia muuttuu lämpöenergiaksi. Energia säilyy

$$\frac{1}{2}mv^2 = mc\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v^2}{2c} = \frac{250^2\,\text{m}^2/\text{s}^2}{2\cdot 130\,\text{N m}/(\text{kg K})} = \underline{240\,\text{K}}.$$

— — — — — — — — — — — —

11.4. Vesi jäähtyy ja mittari lämpenee

$$mc(t_1 - t) = C(t - t_2)$$

$$0{,}25\,\text{kg}\cdot 4190\frac{\text{J}}{\text{kg}\,^\circ\text{C}}\cdot(t_1 - 45{,}6\,^\circ\text{C}) = 62\frac{\text{J}}{^\circ\text{C}}(45{,}6 - 18{,}6)\,^\circ\text{C} \Rightarrow \underline{t = 47{,}2\,^\circ\text{C}}.$$

— — — — — — — — — — — —

11.6. Vesi höyrystyy ja kiuas kivineen jäähtyy. Energiat yhtä suuret.
$mr_{60} = (m_{Fe}c_{Fe} + m_K c_K)\cdot(250 - 100)\,^\circ\text{C}$ Sijoitetaan taulukoista 4 ja 1 sekä tehtävästä 10.5. saatavat arvot ja saadaan $\underline{m = 3{,}5\text{ kg}}$.

— — — — — — — — — — — —

11.8. Vanteiden lämpenemisenergia = 0,5 · auton liike-energia

$$m_{Fe}\cdot c\cdot\Delta t = 0{,}5\cdot\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1500\,\text{kg}\cdot 33{,}3^2\,\text{m}^2/\text{s}^2}{6{,}2\,\text{kg}\cdot 473\,\text{J}/(\text{kg}\,^\circ\text{C})} = \underline{140\,^\circ\text{C}}.$$

— — — — — — — — — — — —

11.10. Jää sulaa + jää ja vesi lämpenevät = höyry tiivistyy + höyry jäähtyy

$$20\,\text{g}\cdot 333\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + 220\,\text{g}\cdot 4{,}19\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\,^\circ\text{C}}\cdot t = 100\,\text{g}\cdot 2256\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + 100\,\text{g}\cdot 4{,}19\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\,^\circ\text{C}}(100\,^\circ\text{C} - t)$$

$\Rightarrow t = 190$ °C. Tämä on mahdoton tulos, koska höyry oli vain 100-asteista.

Se merkitsee, että pienempikin höyrymäärä riittää sulattamaan jään ja lämmittämään veden 100-asteiseksi. Tulos 100 °C.

11.12. Taulukosta 2 saadaan etanolille $c = 2{,}47\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}\,°\text{C}}$, $T_r = 78{,}3°\,\text{C}$ ja $r = 854\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.

Välin 21 °C → 78,3 °C lämmitysaika $P\,t_1 = m\,c\,\Delta T$

$$\Rightarrow \quad t_1 = \frac{0{,}146\,\text{kg}\cdot 2470\,\text{J}/(\text{kg}\,°\text{C})\cdot(78{,}3-21)\,°\text{C}}{96\,\text{J/s}} = 215\,\text{s} = \underline{3{,}6\,\text{min}}.$$

Kiehumisen vaatima aika

$$P\,t_2 = m\,r \quad\Rightarrow\quad t_2 = \frac{0{,}146\,\text{kg}\cdot 854\cdot 10^3\,\text{J/kg}}{96\,\text{J/s}} = 1300\,\text{s} = \underline{21{,}7\,\text{min}}.$$

Koko aika on 25,2 min.

11.14. Taulukosta 4 $\begin{matrix} p_{vs18} = 2{,}06\,\text{kPa} \\ p_{vs\text{-}4} = 0{,}44\,\text{kPa} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \dfrac{0{,}44\,\text{kPa}}{2{,}06\,\text{kPa}} = 0{,}21 = \underline{21\,\%}.$

$$\rho_v = \frac{p_v\,M}{R\,T} = \frac{440\,\text{N/m}^2\cdot 18\cdot 10^{-3}\,\text{kg/mol}}{8{,}31\,\text{N m/mol K}\cdot(273+18)\,\text{K}} = \underline{3{,}3\,\text{g/m}^3}.$$

11.16. Ilman osapaine muuttuu vakiotilavuuden mukaisesti ja vesihöyryn osapaine pienenee höyrynpainetaulukon 4 mukaisesti.

Vesihöyrylle: $p_{vs80} = 0{,}474\,\text{bar}$ ja $p_{vs8} = 1{,}07\,\text{kPa} = 0{,}011\,\text{bar}$.

Ilman osapaine alussa $p_1 = (1{,}20 - 0{,}474)\,\text{bar} = 0{,}726\,\text{bar}$ ja se muuttuu isokoorisesti

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1}\,p_1 = \frac{(273+8)\,\text{K}}{(273+80)\,\text{K}}\cdot 0{,}726\,\text{bar} = 0{,}578\,\text{bar}.$$

Säiliön uusi paine $p = 0{,}011\,\text{bar} + 0{,}578\,\text{bar} = \underline{0{,}59\,\text{bar}}$.

11.18. Kosteutta lisättävä 50 % eli $p_{v\,\text{lisä}} = 0{,}5\cdot p_{vs20} = 0{,}5\cdot 2{,}34\,\text{kPa} = 1{,}17\,\text{kPa}$.

$$m_{v\,\text{lisä}} = \rho V = \frac{p_{v\,\text{lisä}}\cdot M}{RT} = \frac{1170\dfrac{\text{N}}{\text{m}^2}\cdot 18\cdot 10^{-3}\dfrac{\text{kg}}{\text{mol}}}{8{,}31\dfrac{\text{Nm}}{\text{mol K}}\cdot 293\,\text{K}}\cdot 60\,\text{m}^3 = \underline{0{,}52\,\text{kg}}.$$

11.20. Nesteen alkuperäisen määrän on jäähdyttävä 40 °C. Silloin

$$1\,\text{kg}\cdot c\cdot 40\,°\text{C} = 0{,}25\,\text{kg}\cdot 190\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad\Rightarrow\quad c = \underline{1{,}19\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\,°\text{C}}}.$$

Kirjan 6. painoksessa on virheellinen tulos.

11.22. $P_{\text{sähkö}} = \eta P_{\text{lämpö}} = \eta\rho\frac{V}{t}H \Rightarrow \eta = \dfrac{100\cdot10^6\frac{\text{J}}{\text{s}}\cdot3600\text{s}}{850\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot31{,}5\text{m}^3\cdot42{,}7\cdot10^6\frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 0{,}31 = \underline{31\,\%}.$

— — — — — — — — — — — —

11.24. $\rho_{\text{vs18}} = \dfrac{p_{\text{vs18}}M}{RT} = \dfrac{2{,}06\,\text{kPa}\cdot18\,\text{g/mol}}{8{,}31\,\text{Nm}/(\text{mol K})\cdot291\,\text{K}} = 15{,}3\dfrac{\text{g}}{\text{m}^3} \Rightarrow \varphi = \dfrac{10\,\text{g/m}^3}{15{,}3\,\text{g/m}^3} = \underline{65\,\%}.$

$\rho_{\text{vs20}} = \dfrac{p_{\text{vs20}}M}{RT} = \dfrac{2{,}34\,\text{kPa}\cdot18\,\text{g/mol}}{8{,}31\,\text{Nm}/(\text{mol K})\cdot293\,\text{K}} = 17{,}3\dfrac{\text{g}}{\text{m}^3} \Rightarrow \varphi = \dfrac{10\,\text{g/m}^3}{17{,}3\,\text{g/m}^3} = \underline{58\,\%}.$

— — — — — — — — — — — —

11.26. Laatta jäähtyy ja R-134A höyrystyy. $\rho V c\Delta T = mr$

$$m = \frac{2300\,\text{kg/m}^3\cdot(61\cdot31\cdot0{,}2)\text{m}^3\cdot0{,}80\,\text{kJ}/(\text{kg}\,^\circ\text{C})\cdot25\,^\circ\text{C}}{206\,\text{kJ/kg}} = \underline{84\cdot10^3\,\text{kg}}.$$

Kirjan 6. painoksessa on virheellinen tulos.

Luku 12

12.2. Kyseessä on lämmön kuljetus

$$P = \rho q_V c\Delta t = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot0{,}0056\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\cdot4{,}19\cdot10^3\frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}\cdot(117-67)^\circ\text{C} = \underline{1{,}2\,\text{MW}}.$$

Veden on oltava nesteenä lämpötilassa 117 °C. Taulukko 4 $\Rightarrow$ n.2 bar.

— — — — — — — — — — — —

12.4. Tässä on kyse lämmön johtumisesta haalarin eristeen läpi.

$$\Phi = \lambda A\frac{\theta}{d} = 0{,}043\frac{\text{W}}{\text{m}\,^\circ\text{C}}\cdot1{,}8\,\text{m}^2\cdot\frac{(34-(-25))^\circ\text{C}}{0{,}02\,\text{m}} = \underline{230\,\text{W}}.$$

— — — — — — — — — — — —

12.6. Lämpöenergia johtuu seinien läpi ja $40\cdot\Phi_1 = 370\dfrac{\text{W}}{^\circ\text{C}}\cdot\theta \Rightarrow$

$$\theta = \frac{40\cdot100\,\text{W}}{370\,\text{W}/^\circ\text{C}} = 10{,}8\,^\circ\text{C} \Rightarrow \text{Tulos on } (10{,}8+12)^\circ\text{C} = \underline{23\,^\circ\text{C}}.$$

— — — — — — — — — — — —

12.8. Kyseessä on lämmön siirtyminen yksikerroksisen seinämän läpi.
Taulukosta 7 saadaan lasin λ-arvo. Lasketaan ensin lämmönvastus ja lämpövirran tiheys.

$$R = \frac{1}{h_a} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{h_b} = \frac{2}{40\,\text{W}/(\text{m}^2\,^\circ\text{C})} + \frac{0{,}006\,\text{m}}{0{,}81\,\text{W}/(\text{m}\,^\circ\text{C})} = 0{,}0574\frac{\text{m}^2\,^\circ\text{C}}{\text{W}}.$$

$$\Phi_1 = \frac{T_a - T_b}{R} = \frac{(20-(-5))\,°C}{0{,}0574\,m^2\,°C/W} = \underline{440\,W/m^2}.$$

Lasissa $\Phi_1 = \lambda \frac{\theta}{d} \;\Rightarrow\; \theta = \frac{0{,}006\,m \cdot 435\,W/m^2}{0{,}81\,W/(m\,°C)} = \underline{3{,}2\,°C}.$

12.10. Halkaisija on 3,0 m ja seinämän vahvuus 5,0 cm = 0,05 m. Silloin seinämä voidaan käsitellä tasona, jossa $A = \pi\, d\, l$. Taulukosta 7 saadaan λ ja lämpöteho on

$$\Phi = \lambda A \frac{\theta}{d} = 0{,}035 \frac{W}{m\,°C} \cdot \pi \cdot 3\,m \cdot 30\,m \cdot \frac{50\,°C}{0{,}05\,m} = \underline{10\,kW}.$$

12.12. Tätä käsitellään lämpövirtana "tasopintojen" läpi, koska lämpövirta sivulle on estetty. Lasketaan ensin lämmönvastus ja lämpövirta.

$$R = \frac{d_{St}}{\lambda_{St}} + \frac{d_{Cu}}{\lambda_{Cu}} = \frac{0{,}20\,m}{58\,W/(m\,°C)} + \frac{0{,}20\,m}{393\,W/(m\,°C)} = 0{,}00396 \frac{m^2\,°C}{W}.$$

b) $\Phi = A \frac{T_a - T_b}{R} = 5{,}0 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot \frac{100\,°C}{0{,}00396\,(m^2\,°C)/W} = \underline{12{,}6\,W}.$

a) Teräksessä $\Phi = \lambda_{St} A \frac{\theta_{St}}{d_{St}} \;\Rightarrow\; \theta_{St} = \frac{12{,}64\,W \cdot 0{,}20\,m}{58\,W/(m\,°C) \cdot 5 \cdot 10^{-4}\,m^2} = \underline{87\,°C} = \text{tulos}.$

12.14. Lasketaan ensin lämmönvastus.

$$R = \frac{1}{35 \frac{W}{m^2\,°C}} + \frac{0{,}004\,m}{46 \frac{W}{m\,°C}} + \frac{0{,}001\,m}{0{,}25 \frac{W}{m\,°C}} + \frac{1}{5800 \frac{W}{m^2\,°C}} = 0{,}0328 \frac{m^2\,°C}{W}$$

Lämpötilanmuutos kaasu-teräs on

$$\theta_s = \frac{R_s}{R} \cdot (T_s - T_u) = \frac{\frac{1}{35} \frac{m^2\,°C}{W}}{0{,}0328 \frac{m^2\,°C}{W}} \cdot (750 - 180)\,°C = 496\,°C.$$

Lämpötilan muutos teräksessä on hyvin pieni, joten teräksen lämpötila on
750 °C – 496 °C = <u>254 °C</u>.

12.16. Lämpösäteily kuumemmasta (343 K) kylmempään (293 K).

$$\Phi = \varepsilon A \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right) = 0{,}85 \cdot 1{,}2\,m^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2\,K^4} \cdot \left(343^4 - 293^4\right) K^4 = \underline{370\,W}.$$

12.18. Tässä on myös lämpösäteily, jossa kysytään kuumemman pinnan lämötilaa.

$$T_1^4 = \frac{\Phi}{\varepsilon A \sigma} + T_2^4 = \frac{850\,\text{W}}{0{,}95 \cdot 1\,\text{m}^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\text{W}/(\text{m}^2\,\text{K}^4)} + 293\,\text{K}^4 = 2{,}3 \cdot 10^{10}\,\text{K}^4$$

$$\Rightarrow T_1 = 390\,\text{K} \Rightarrow t_1 = \underline{117\,°\text{C}.}$$

— — — — — — — — — — — —

12.20. Pallon lämpökapasiteetti $C = \rho V c = 8930 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{4\pi \cdot 0{,}1^3\,\text{m}^3}{3} \cdot 389 \frac{\text{J}}{\text{kg}\,°\text{C}} = 14550 \frac{\text{J}}{°\text{C}}$

Pallon pinta-ala $A = 4\pi \cdot 0{,}1^2\,\text{m}^2 = 0{,}1257\,\text{m}^2$.

Säteilyn yhtälöstä $\Phi = \frac{Q}{t} = \varepsilon A \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)$ ratkaistaan t.

$$t = \frac{14550\,\text{J}}{0{,}018 \cdot 0{,}1257\,\text{m}^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{J/s}}{\text{m}^2\,\text{K}^4} \cdot \left(372{,}5^4 - 293^4\right)\text{K}^4} = 9300\,\text{s} = \underline{2{,}6\,\text{h}.}$$

Mustunut pinta $\varepsilon \approx 0{,}75 \Rightarrow t_2 = \frac{0{,}018}{0{,}75} \cdot t = 224\,\text{s} \approx \underline{3{,}7\,\text{min}.}$

Kymmenellä asteella jäähtyminen kestää yli kymmenkertaisen ajan, koska säteilijän keskilämpötila on noin 95 °C eikä 99,5 °C.
Miksi isoäidin äidin kuparinen kahvipannu oli aina kiiltävä?

Luku 13

13.2. Isobaarisessa muutoksessa

$$(W_u)_{12} = p_c (V_1 - V_2) = 2{,}1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (15 - 60) \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = \underline{-9{,}5\,\text{kJ}.}$$

13.4. Höyryn laajetessaan tekemä isobaarinen työ

$$-(W_u)_{12} = p_c (V_2 - V_1) = 1{,}013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (1673 - 1) \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = \underline{169\,\text{kJ}.}$$

Sisäenergian muutos $\Delta U = Q + W_u = (2256 - 169)\,\text{kJ/kg} = \underline{2090\,\text{kJ/kg}.}$

13.6. Isokoorisessa muutoksessa $T_1 = \frac{p_1}{p_2} \cdot T_2 = \frac{2{,}3\,\text{bar}}{0{,}95\,\text{bar}} \cdot 280\,\text{K} = \underline{680\,\text{K}.}$

Sisäenergian muutos

$$\Delta U = Q = m c_V \Delta T = m \frac{c_p}{\gamma} \cdot \Delta T = 0{,}12\,\text{kg} \cdot \frac{1{,}0\,\text{kJ}/(\text{kg}\,\text{K})}{1{,}4} \cdot (280 - 680)\,\text{K} = \underline{-34\,\text{kJ}.}$$

— — — — — — — — — — — —

13.8. Isoterminen tilavuudenmuutostyö

$$W_u = -\frac{m}{M}RT_c \ln\frac{p_1}{p_2} = -\frac{2{,}0\,\text{kg}}{29\cdot 10^{-3}\,\text{kg/mol}}\cdot 8{,}31\frac{\text{J}}{\text{mol K}}\cdot 310\,\text{K}\cdot \ln\frac{5\,\text{bar}}{21\,\text{bar}} = \underline{+250\,\text{kJ}}.$$

— — — — — — — — — — —

13.10. Tunnetaan $m = 1\,\text{kg}$, $\gamma = 1{,}67$, $T_1 = 540 + 273 = 813\,\text{K}$, $T_2 = 260 + 273 = 533\,\text{K}$, $W_u = -180\,\text{kJ}$

Adiabaattinen laajeneminen

$$W_u = \frac{mR}{M(\gamma-1)}\cdot (T_2 - T_1)$$

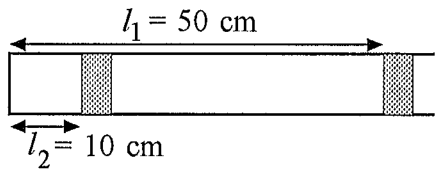
$$\Rightarrow\quad M = \frac{1\,\text{kg}\cdot 8{,}31\,\text{J}/(\text{mol K})}{-180\cdot 10^3\,\text{J}\cdot(1{,}67-1)}\cdot(533-813)\,\text{K} = \underline{19{,}3\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{kg}}{\text{mol}}}.$$

$$\mathbf{D}U = W_u = mc_V\mathbf{D}T \Rightarrow c_V = \frac{-180\,\text{kJ}}{1\,\text{kg}\cdot(533-813)\,\text{K}} = \underline{0{,}640\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}}.$$

$$c_p = \gamma\, c_V = \underline{1{,}07\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}}.$$

— — — — — — — — — — —

13.12. Adiabaattisessa muutoksessa



$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \Rightarrow p_2 = 5^{1{,}4}\cdot 1\,\text{bar} = \underline{9{,}5\,\text{bar}}.$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = 5^{0{,}4}\cdot 293\,\text{K} = \underline{558\,\text{K}} = \underline{285\,°\text{C}}.$$

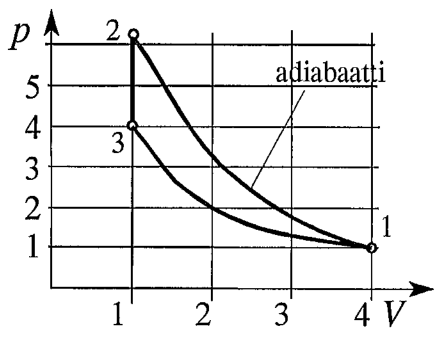
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{A\cdot 50\,\text{cm}}{A\cdot 10\,\text{cm}} = 5 \qquad p_1 = 1\,\text{bar},\quad T_1 = 293\,\text{K}$$

— — — — — — — — — — —

13.14. Muutos 1→2 on adiabaattinen puristus

$$\frac{V_1}{V_2} = 4 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 4^{1{,}33} = 6{,}32 \text{ ja}$$

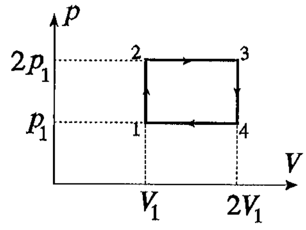
$$\frac{T_2}{T_1} = 4^{(1{,}33-1)} = 1{,}58.$$



Muutos 3→1 on isoterminen, koska $T_3 = T_1$.
Silloin $p_3 = 4p_1$.
Koska kaasu palautuu alkuperäiseen tilaan, on viety työ = poistunut lämpöenergia =<u>600 kJ</u>.

— — — — — — — — — — —

13.16. Lasketaan ensin nurkkapisteiden lämpötilat ja yksittäisissä muutoksissa tapahtuvat ulkoiset työt ja siirtyvät lämpöenergiat. Annetut tiedot ovat



$n = 1$ $\gamma = 1{,}40$

$T_1 = 200\,\mathrm{K}$ $C_{mV} = 20{,}8\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$

$1 \to 2$ isokoorinen $\Rightarrow$ $T_2 = 2T_1 = 400\,\mathrm{K}$

$(W_u)_{12} = 0$ $Q_{12} = nC_{mV}(T_2 - T_1) = +4160\,\mathrm{J}$

$2 \to 3$ isobaarinen $\Rightarrow$ $T_3 = 2T_2 = 800\,\mathrm{K}$

$$(W_u)_{23} = nR(T_2 - T_3) = 1\,\mathrm{mol}\cdot 8{,}31\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}\cdot(400 - 800)\,\mathrm{K} = -3324\,\mathrm{J}$$

$$Q_{23} = n\gamma C_{mV}(T_3 - T_2) = \gamma\cdot 2\cdot Q_{12} = +11648\,\mathrm{J}$$

$3 \to 4$ isokoorinen $\Rightarrow$ $T_4 = T_3/2 = 400\,\mathrm{K}$

$(W_u)_{34} = 0$ $Q_{34} = nC_{mV}(T_4 - T_3) = -8320\,\mathrm{J}$

$4 \to 1$ isobaarinen $\Rightarrow$ $T_1 = T_4/2 = 200\,\mathrm{K}$

$$(W_u)_{41} = nR(T_4 - T_1) = 1\,\mathrm{mol}\cdot 8{,}31\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}\cdot(400 - 200)\,\mathrm{K} = +1662\,\mathrm{J}$$

$$Q_{41} = n\gamma C_{mV}(T_1 - T_4) = -Q_{23}/2 = -5842\,\mathrm{J}$$

a) $\eta = \dfrac{-\sum W_u}{\text{viety lämpö}} = \dfrac{+3324 - 1662}{4160\,\mathrm{J} + 11648\,\mathrm{J}} = 0{,}105 = \underline{10{,}5\,\%}.$ b) $\underline{1{,}66\,\mathrm{kJ}}.$

— — — — — — — — — — —

13.18. Tarvittava lämpöteho $\Phi_1 = \dfrac{P}{\eta} = \dfrac{440\,\mathrm{MW}}{0{,}32} = \underline{1375\,\mathrm{MW}}.$

Jäähdytysteho = veteen siirtyvä teho $\Phi_2 = 1375\,\mathrm{MW} - 440\,\mathrm{MW} = 935\,\mathrm{MW}.$

$$\Phi_2 = \frac{m}{t}c\Delta T \;\Rightarrow\; \frac{m}{t} = q_m = \frac{935\cdot 10^6\,\mathrm{J/s}}{4{,}19\cdot 10^3\,\mathrm{J/(kg\,°C)}\cdot 5\,°\mathrm{C}} = 45\cdot 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \mathrel{\hat=} \underline{45\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}}.$$

— — — — — — — — — — —

13.20. Tässä tarvitaan myös tehtävän 13.19 arvot.

$$\eta = \frac{P}{\Phi_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \;\Rightarrow\; P = \frac{800 - 340}{800}\cdot 3{,}2\,\mathrm{MW} = 1{,}84\,\mathrm{MW}.$$

Lämpötila alenee 10 %, joten uusi $T_1 = 800\,\mathrm{K} - 80\,\mathrm{K} = 720\,\mathrm{K}.$

Uusi antoteho $P_u = \dfrac{720 - 340}{720}\cdot 3{,}2\,\mathrm{MW} = 1{,}69\,\mathrm{MW}.$

Teho pienenee $\dfrac{1{,}84 - 1{,}69}{1{,}84}\cdot 100\,\% = \underline{8{,}2\,\%}.$

— — — — — — — — — — —

13.22. $\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$. Saadaan $\eta = \dfrac{T_1 - (273+35)\,\text{K}}{T_1} \Rightarrow \underline{T_1 = 590\,\text{K} \mathrel{\hat=} 320\,°\text{C}}.$

— — — — — — — — — — —

13.24. Tunnetaan $Q_1 = 63\,\text{GJ}$, $T_1 = 313\,\text{K}$, $T_2 = 273\,\text{K}$ ja $\varepsilon_1 = 0{,}40 \cdot \varepsilon_{1C}$.

Saadaan $\varepsilon_1 = \dfrac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot 0{,}40 = 3{,}13 = \dfrac{Q_1}{W} \Rightarrow W = \dfrac{63\,\text{GJ}}{3{,}13} = \underline{20{,}1\,\text{GJ} = 5600\,\text{kWh}}.$

Energia 63 GJ – 20,1 GJ = 42,9 GJ jäädyttää vettä. Olettaen, että 0°C vesi jäätyy on

$$42{,}9\,\text{GJ} = ms = \rho V s = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot V \cdot 333 \cdot 10^3\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \Rightarrow V = \underline{129\,\text{m}^3}.$$

— — — — — — — — — — —

13.26. Jäästä poistettava kylmäteho $\Phi_2 = \dfrac{m}{t} \cdot s = \dfrac{0{,}50\,\text{kg}}{3600\,\text{s}} \cdot 333 \cdot 10^3\,\dfrac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 46{,}25\,\text{W}.$

Kylmäkerroin $(\varepsilon_k =)\ \dfrac{T_2}{T_1 - T_2} = \dfrac{\Phi_2}{P} \Rightarrow P = \dfrac{313\,\text{K} - 263\,\text{K}}{263\,\text{K}} \cdot 46{,}25\,\text{W} = \underline{8{,}8\,\text{W}}.$

— — — — — — — — — — —

13.28. Tehtävän 13.27 $T_2 = \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} \cdot T_1 = 6^{0{,}4} \cdot 280\,\text{K} = 573\,\text{K}.$

Paineen nousu $p_3 = 2p_2$ merkitsee lämpötilan nousua $T_3 = 2T_2$ eli $\Delta T = T_2 = 573\,\text{K}$.
Energian säilyminen antaa $m_{\text{Pa}} \cdot H = m_{\text{ilma}} \cdot c\,\Delta T = \rho V c\,\Delta T$.
Taulukoista 3 ja 6 (tai Tekniikan KAAVASTOsta) saadaan tarvittavat arvot ja

$$m_{\text{Pa}} = \frac{1{,}20\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1\,\text{m}^3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^3\,\dfrac{\text{J}}{\text{kg\,K}} \cdot 573\,\text{K}}{43{,}6 \cdot 10^6\,\dfrac{\text{J}}{\text{kg}}} = 19 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} = \underline{19\,\text{g}}.$$

— — — — — — — — — — —

13.30. Tila 1: 1,0 bar; 240 K. Adiabaattinen puristus tilaan 2.

Tila 2: 2,5 bar; 312 K $\quad T_2 = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \cdot T_1 = (2{,}5)^{0{,}4/1{,}4} \cdot 240\,\text{K} = 312\,\text{K}.$

Isobaarinen laajeneminen tilaan 3. $T_3 = 3 \cdot T_2 = 935\,\text{K}$

Tila 3: 2,5 bar; 935 K. Adiabaattinen laajeneminen tilaan 4.

Tila 4: 1 bar; 720 K. $\quad T_4 = 3 \cdot T_1 = 720\,\text{K}.$

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{240}{311{,}8} = \underline{0{,}23}.$$

— — — — — — — — — — —

13.32. Puristus on adiabaattinen. $\dfrac{T_2}{T_1} = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1/\gamma)} = 1{,}5^{0{,}4/1{,}4} = \underline{1{,}12\text{ - kertaiseksi.}}$

$$P_t = \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{n}{t}\cdot R\cdot(T_2-T_1) = \frac{1{,}4}{0{,}4}\cdot 1\frac{\text{mol}}{\text{s}}\cdot 8{,}31\frac{\text{J}}{\text{mol K}}\cdot(1{,}1228-1)\cdot 273\,\text{K} = \underline{980\,\text{W}}.$$

— — — — — — — — — — — —

13.34. Adiabaattinen laajeneminen. $T_2 = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{0{,}4/1{,}4}\cdot 290\,\text{K} = \underline{174\,\text{K}}.$

$$P_t = \frac{\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{n/t}{M}\cdot R\cdot|T_2-T_1| = \frac{1{,}4}{0{,}4}\cdot\frac{0{,}025\,\text{kg/s}}{0{,}029\,\text{kg/mol}}\cdot 8{,}31\frac{\text{J}}{\text{mol K}}\cdot|173{,}8-290|\,\text{K} = \underline{2{,}9\,\text{kW}}.$$