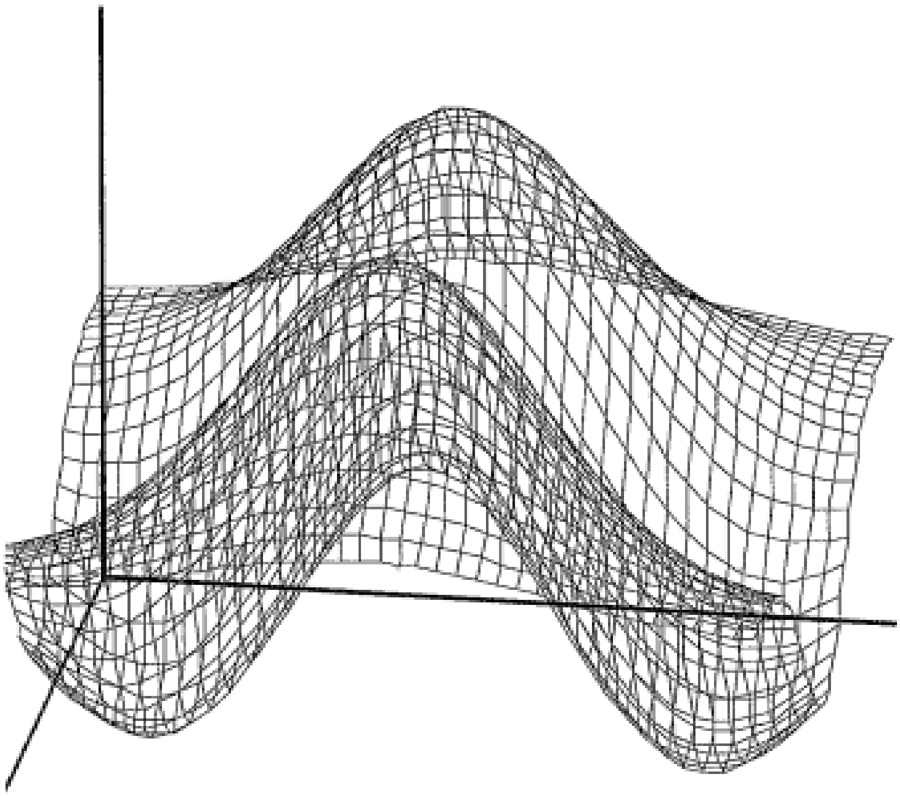
MATLAB

Matriisit

Timo Mäkelä



Tammertekniikka

3. MATRIISIT

MATLABissa perustietoalkio on matriisi. Matriisi on suorakulmion muotoinen lukutaulukko. Jos matriisissa on m riviä ja n saraketta, matriisin sanotaan olevan kertalukua $m \times n$. Puhutaan myös $m \times n$-matriisista. Erityisesti

- Luvut eli **skalaarit** ovat 1×1-matriiseja.
- **Vaakavektorit** ovat matriiseja, joissa on yksi rivi.
- **Pystyvektorit** ovat matriiseja, joissa on yksi sarake.

Matriisin alkiot a_{ij} indeksoidaan siten, että

- ensimmäinen indeksi i ilmoittaa rivin
- toinen indeksi j ilmoittaa sarakkeen.

3.1 Matriisien syöttö

Matriisit syötetään *hakasulkujen väliin* vaakariveittäin seuraavasti:

- rivin alkiot erotetaan toisistaan välilyönnillä tai pilkulla
- rivit erotetaan toisistaan **Enter**in painalluksella tai puolipisteellä.

```
>> A = [1 2 3
4 5 6
7 8 9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9

>> B = [-3, 2, 0; 4, 3, -2]
B =
    -3     2     0
     4     3    -2
```

Syötetään vielä vaaka- ja pystyvektorit

```
>> u = [1 0 -2]
u =
     1     0    -2

>> v = [1; -3; -7]
v =
     1
    -3
    -7
```

Merkintä [ ] tarkoittaa *tyhjää matriisia*, jossa ei ole yhtään alkiota.

Matriisin alkioihin viitataan ilmoittamalla rivi ja sarake. Seuraavassa on tulostettu matriisin A 2. rivin 1. alkio:

```
> A(2,1)
ans =
     4
```

Vektorin alkioihin voidaan viitata yhdellä indeksillä:

```
>> u(3)
ans =
```

```
      -2
```

Matriisin riveihin ja sarakkeisiin viitataan seuraavasti:

- $A(i, :)$ matriisin A i:s rivi
- $A(:, j)$ matriisin A j:s sarake

Matriisin A 2. rivi ja 3. sarake:

```
>> A(2,:)
ans =
      4     5     6

>> A(:,3)
ans =
      3
      6
      9
```

Matriisin kertaluku saadaan selville komennolla **size**:

```
>> size(B)
ans =
      2     3
```

Vektorin dimensio saadaan selville komennolla **length**:

```
>> length(v)
ans =
      3
```

Seuraava komento tallentaa matriisin rivien määrän muuttujaan m ja sarakkeiden määrän muuttujaan n.

```
>> [m,n]=size(B)
m =
      2
n =
      3
```

Seuraavassa on esitetty matriisinluontikomentoja:

Komento	**Toiminto**
eye(n)	$n \times n$-yksikkömatriisi
eye(m,n)	$m \times n$-yksikkömatriisi: matriisi, jonka lävistäjällä on ykkösiä, muualla nollia
eye(size(A))	yksikkömatriisi, jolla on sama kertaluku kuin matriisilla A
zeros(n)	$n \times n$-matriisi, jonka alkiot ovat nollia
zeros(m,n)	$m \times n$-matriisi, jonka alkiot ovat nollia
zeros(size(A))	nollamatriisi, jolla on sama kertaluku kuin matriisilla A
ones(n)	$n \times n$-matriisi, jonka alkiot ovat ykkösiä
ones(m,n)	$m \times n$-matriisi, jonka alkiot ovat ykkösiä
ones(size(A))	matriisi, jonka alkiot ovat ykkösiä ja jolla on sama kertaluku kuin A:lla

Esim.

```
>> eye(3)
ans =
      1     0     0
      0     1     0
      0     0     1

>> x = [3 4 -5 7]; zeros(size(x))
ans =
```

```
     0     0     0     0

>> 15*ones(1,7)
ans =
    15    15    15    15    15    15    15
```

Komento **rand** antaa satunnaisluvun, joka on tasaisesti jakautunut välillä $[0, 1]$. Satunnaismatriiseja voi luoda seuraavasti:

- **rand(n)**: $n \times n$-satunnaismatriisi, jonka alkiot ovat tasaisesti jakautuneet välillä $[0, 1]$.
- **rand(m,n)**: $m \times n$-satunnaismatriisi, jonka alkiot ovat tasaisesti jakautuneet välillä $[0, 1]$.

Seuraavalla komennolla muodostetaan 2x3-satunnaismatriisi, jonka alkiot ovat kokonaislukuja välillä 0..9:

```
>> fix(10*rand(2,3))
ans =
     9     6     8
     2     4     7
```

3.2 Vektorien syöttö

MATLABissa *kaksoispisteellä* on tärkeä merkitys. Edellä oli jo esillä kuinka matriisin rivi- ja sarakevektorit muodostetaan kaksoispistettä käyttäen. Myös vektoreiden muodostamisessa voidaan käyttää kaksoispistettä.

Jos A on $m \times n$-matriisi, niin $A(:)$ on pystyvektori, joka on saatu asettamalla *matriisin A sarakkeet peräkkäin*. Tämän pystyvektorin alkioihin voidaan viitata yhdellä indeksillä muodossa $A(k)$.

Esim.

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9

>> A(:)
ans =
     1
     4
     7
     2
     5
     8
     3
     6
     9

>> A(4)
ans =
     2
```

Vaakavektoreita voidaan luoda seuraavasti:

- *a:b* on vektori, jonka alkiot muodostavat lukujonon $a, a+1, a+2, \ldots,$ lukuun b asti. Tuloksena on *tyhjä matriisi* [ ], jos $a > b$.
- *a*:Δ:*b* on vektori, jonka alkiot muodostavat lukujonon $a, a+\Delta, a+2\Delta, \ldots$ lukuun b asti. Tuloksena on tyhjä matriisi [ ], jos lisäys Δ on rajoihin nähden vääränmerkkinen.

- **linspace(*a*,*b*)** on vektori, joka koostuu 100:sta välillä $[a,b]$ tasavälisesti olevasta luvusta $a, c_2, c_3, \ldots, c_{99}, b$.
- **linspace(*a*,*b*,*n*)** on vektori, joka koostuu n:sta välillä $[a,b]$ tasavälisesti olevasta luvusta.

Pystyvektori saadaan transponoimalla vaakavektori: jos **v** on vaakavektori, niin **v'** on pystyvektori.

Esim.

```
>> v1 = 2:8
v1 =
     2     3     4     5     6     7     8

>> v2 = 1.2: 7.9
v2 =
    1.2000    2.2000    3.2000    4.2000    5.2000    6.2000    7.2000

>> v3 = 1.2:0.5:4.1
v3 =
    1.2000    1.7000    2.2000    2.7000    3.2000    3.7000

>> linspace(1.2,4.1,6)
ans =
    1.2000    1.7800    2.3600    2.9400    3.5200    4.1000

>> v = (1:3:10)'
v =
     1
     4
     7
    10
```

3.3 Osamatriisit ja lohkomatriisit

Matriisin A **osamatriisilla** tarkoitetaan matriisia, joka on muodostettu matriisin A alkioista.

Seuraavaan taulukkoon on koottu $m \times n$-matriisi A osamatriisin muodostuskomentoja. Osa näistä on ollut esillä jo aiemmin.

Komento	Toiminto
A(i,j)	i:nnen rivin ja j:nnen sarakkeen alkio
A(i,:)	i:s rivi
A(:,j)	j:s sarake
A(i:k,:)	alimatriisi, joka koostuu riveistä i, i+1, ..., k
A(:,j:k)	alimatriisi, joka koostuu sarakkeista j, j+1, ..., k
A(i:k,j:p)	alimatriisi, joka koostuu riveistä i...k ja sarakkeista j...p.
A(:)	pystyvektori, joka on saatu asettamalla matriisin A sarakkeet peräkkäin.
A(j:k)	vektorin A(:) alkiot j...k vaakavektorina.
A([i1,i2,...],:)	osamatriisi, joka koostuu riveistä i1, i2, ...
A(:,[j1,j2,...])	osamatriisi, joka koostuu sarakkeista j1, j2, ...
A([i1,i2,...],[j1,j2,...])	osamatriisi, joka koostuu riveistä i1, i2, ... ja sarakkeista j1, j2, ...

Esim.

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =
      1     2     3
      4     5     6
      7     8     9

>> A(2:3,:)
ans =
      4     5     6
      7     8     9

>> A([3,2],:)
ans =
      7     8     9
      4     5     6
```

Avainsana **end** viittaa matriisin viimeiseen sarakkeeseen tai riviin.

```
>> A(end,:)
ans =
      7     8     9
```

Matriisista **A** poistetaan

- *i*:s rivi komennolla **A(i,:) = [ ]**
- *j*:s sarake komennolla **A(:,j) = [ ]**

```
>> A(2,:) = []
A =
      1     2     3
      7     8     9
```

Lohkomatriisi on matriisi, jonka alkiot ovat matriiseja. Alkioina olevien matriisien on oltava kertaluvultaan yhteen sopivia. Näin muodostuu isompi matriisi, jonka osamatriiseja lohkot ovat. Lohkomatriiseja muodostetaan samaan tapaan kuin tavallisia matriiseja.

```
>> B = [1 2; 3 4]
B =
      1     2
      3     4

>> [B zeros(2); -B 10*B]
ans =
      1     2     0     0
      3     4     0     0
     -1    -2    10    20
     -3    -4    30    40
```

3.4 Matriisioperaatiot

Seuraavassa esitellään matriisilaskennasta tutut matriisilaskennan perusoperaatiot yhteenlasku ja kertolasku.

Esimerkeissä käytetään seuraavia matriiseja:

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =
      1     2     3
      4     5     6
      7     8     9

>> B = [3 -2 1; 5 3 -2; 4 1 0]
B =
      3    -2     1
      5     3    -2
      4     1     0
```

Matriisien **yhteenlasku** ja **vähennyslasku** on määritelty, jos matriiseilla on *sama kertaluku*. Yhteenlaskussa vastinalkiot lasketaan yhteen; vähennyslaskussa vastinalkiot vähennetään.

```
>> A + B
ans =
    4     0     4
    9     8     4
   11     9     9
```

Yhteenlaskun erikoistapauksena on **skalaarin lisääminen**. Tällöin skalaari lisätään jokaiseen alkioon.

```
>> A+10
ans =
   11    12    13
   14    15    16
   17    18    19
```

Kaksi matriisia voidaan kertoa keskenään, jos *kertojassa on yhtä monta saraketta kuin kerrottavassa rivejä*. Tulon AB i:nnen rivin ja j:nnen sarakkeen alkio on A:n i:nnen rivin ja B:n j:nnen sarakkeen vastinalkioiden tulojen summa.

Tulossa AB on

- yhtä monta *riviä* kuin matriisissa A
- yhtä monta *saraketta* kuin matriisissa B

Kertolaskun merkkinä on *.

```
>> A*B
ans =
   25     7    -3
   61    13    -6
   97    19    -9
```

Kertolaskun erikoistapaus on **skalaarilla kertominen**. Tällöin skalaarilla kerrotaan jokainen matriisin alkio.

```
>> -10*A
ans =
  -10   -20   -30
  -40   -50   -60
  -70   -80   -90
```

Neliömatriisin positiivisella **kokonaislukupotenssilla** tarkoitetaan neliömatriisin kertomista itsellään seuraavasti: $A^k = \overbrace{AA\cdots A}^{k\text{ kpl}}$. Potenssiin korotuksen merkkinä on ^.

```
>> A^4
ans =
        7560        9288       11016
       17118       21033       24948
       26676       32778       38880

>> A*A*A*A
ans =
        7560        9288       11016
       17118       21033       24948
       26676       32778       38880
```

3.5 Taulukko-operaatiot

Aritmeettisia operaatioita, jotka suoritetaan kahden matriisin *vastinalkioiden kesken* sanotaan **taulukko-operaatioiksi** tai **alkioittaisiksi operaatioiksi**. Ne vastaavat taulukkolaskennassa käytettyjä operaatioita. Taulukko-operaatioissa *matriisien kertalukujen on oltava samoja*. Taulukko-operaatio saadaan laittamalla *piste operaattorin eteen.*

Esimerkeissä käytetään seuraavia matriiseja:

```
>> A = [1 2; 3 4]; B = [5 6; 2 3];
A =
      1     2
      3     4

B =
      5     6
      2     3
```

Matriisien **yhteen- ja vähennyslasku** ovat myös taulukko-operaatioita.

Alkioittaisessa tulossa lasketaan vastinalkioiden tulo. Operaatiota merkitään **.***

```
>> A.*B
ans =
      5    12
      6    12
```

Alkioittaisessa jakolaskussa lasketaan vastinalkioiden osamäärä. Alkioittaisia jakolaskuja on kaksi: **jako oikealta ./** ja **jako vasemmalta .**

```
>> A./B
ans =
    0.2000    0.3333
    1.5000    1.3333

>> A.\B
ans =
    5.0000    3.0000
    0.6667    0.7500
```

Alkioittaisessa potenssiin korotuksessa korotetaan kantamatriisi alkioittain eksponenttimatriisin osoittamaan potenssiin. Operaatiota merkitään **.^**

```
>> A.^B
ans =
      1    64
      9    64
```

Alkioittaisen potenssiin korottamisen erikoistapauksia on kaksi:

- **eksponentti on skalaari.** Tällöin matriisin jokainen alkio korotetaan skalaarin osoittamaan potenssiin.
- **kantamatriisi on skalaari.** Tällöin tuloksena on eksponenttimatriisin kokoinen matriisi, joka saadaan korottamalla kantaluku alkioittain eksponenttimatriisin osoittamaan potenssiin.

```
>> A.^2
ans =
      1     4
      9    16

>> 2.^A
ans =
      2     4
      8    16
```

Taulukko-operaatioina voidaan pitää myös kohdassa 2.2 esiteltyjä **matematiikan perusfunktioita**, koska ne *operoivat matriisiin alkioittain*.

```
>> sqrt(A)
ans =
    1.0000    1.4142
    1.7321    2.0000

>> exp(A)
ans =
    2.7183     7.3891
   20.0855    54.5982
```

```
>> sin([pi, 0; pi/2 -pi/4])
ans =
    0.0000         0
    1.0000   -0.7071
```

Esitetään vielä muutama taulukkolaskennan tyyppinen funktio:

Funktio	Toiminto
sum(x)	vektorin x alkioiden summa
prod(x)	vektorin x alkioiden tulo
max(x), min(x)	vektorin x suurin (pienin) alkio
mean(x)	vektorin x alkioiden keskiarvo
std(x)	vektorin x alkioiden keskihajonta
cumsum(x)	vektorin x kumuloituva summa vektorina.

Funktion cumsum(x) kumuloituva summa tarkoittaa seuraavaa:

cumsum(x) = [x(1), x(1)+x(2), x(1)+x(2)+x(3), ...]

Jos edellä **argumenttina on matriisi, suoritetaan laskut erikseen matriisin sarakevektoreille ja tulos esitetään vaakavektorina.** Funktion cumsum tapauksessa tulos on samaa kertalukua oleva matriisi, muissa tapauksissa tavallinen vaakavektori.

```
>> x = [1 3 -4 5 7 11]
x =
     1     3    -4     5     7    11

>> sum(x)
ans =
    23

>> mean(x)
ans =
    3.8333

>> cumsum(x)
ans =
     1     4     0     5    12    23

>> A = [1 2 3
4 5 6
7 8 9]
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
>> sum(A)
ans =
    12    15    18
```

Kertomafunktio n! voidaan laskea tulona **prod(1:n)**:

```
>> prod(1:10)
ans =
     3628800
```