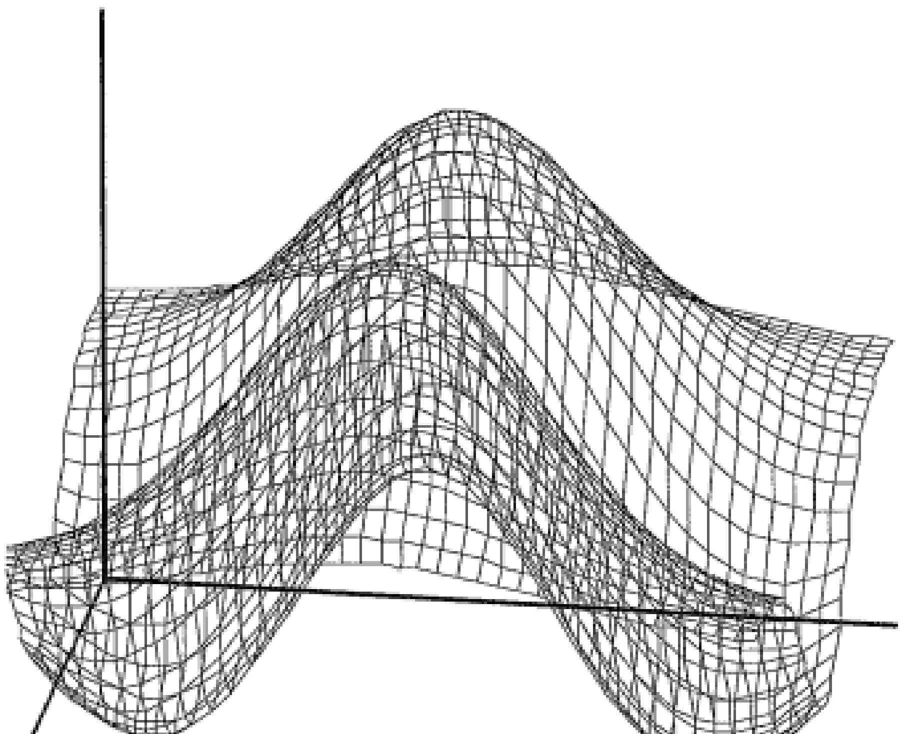
MATLAB

Matriisilaskenta 1

Timo Mäkelä



Tammertekniikka

13. MATRIISILASKENTA 1

13.1 Perusoperaatiot

Matriisin **determinantti** lasketaan komennolla **det**. Matriisin

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
A =

     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

determinantti

```
>> det(A)
ans =
     0
```

Koska determinantti on nolla, on matriisi *singulaarinen* eikä sillä ole käänteismatriisia. Muutetaan matriisin *A* 3. rivin 3. sarakkeen alkio:

```
>> A(3,3)=1
A =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     1
```

Nyt determinantti on

```
>> det(A)
ans =
    24
```

Käänteismatriisi muodostetaan komennolla **inv** tai potenssilla –1:

```
>> inv(A)
ans =
   -1.7917    0.9167   -0.1250
    1.5833   -0.8333    0.2500
   -0.1250    0.2500   -0.1250
>> A^(-1)
```

Matriisin *A* lävistäjäalkiot muodostetaan komennolla **diag(*A*)**. Tuloksena on pystyvektori, joka koostuu lävistäjäalkioista.

```
>> diag(A)
ans =
     1
     5
     1
```

Komennolla **diag(*x*)** muodostetaan lävistäjämatriisi, jonka lävistäjällä on vektorin *x* alkiot.

```
>> diag([1 2 3])
ans =
     1     0     0
     0     2     0
     0     0     3
```

Matriisin **transpoosissa** muutetaan rivit sarakkeiksi. Matriisin B transpoosi on B':

```
>> B
B =
    -3     0
     4    -2
     1    -1
>> B'
ans =
    -3     4     1
     0    -2    -1
```

Itse asiassa B' ottaa matriisin alkioista myös *kompleksikonjugaatit*. Pelkkä transpoosi muodostetaan seuraavalla komennolla B.':

```
>> B = [i, 3i; 2-5i, 4]
B =
        0 + 1.0000i        0 + 3.0000i
   2.0000 - 5.0000i   4.0000
>> B'
ans =
        0 - 1.0000i   2.0000 + 5.0000i
        0 - 3.0000i   4.0000
```

```
>> B.'
ans =
          0 + 1.0000i   2.0000 - 5.0000i
          0 + 3.0000i   4.0000
```

Reaalialkioisille matriiseille nämä ovat samat.

TEHTÄVIÄ

1. Määritä seuraavien matriisien determinantti ja mahdollinen käänteismatriisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3{,}5 & 5{,}1 & 1{,}6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & -2 & 3 & 6 \\ 7 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Muodosta 4-dimensioinen taikaneliö komennolla **magic(4)**. Määritä taikaneliön
   - sarakkeiden summa
   - rivien summa
   - lävistäjäalkioiden summa
   - antilävistäjän alkioiden summa.

   Miten nämä eroavat toisistaan?

13.2 Vektorit

Vektoreiden u ja v

- **skalaaritulo** lasketaan komennolla **dot(*u*,*v*)**
- **vektoritulo** lasketaan komennolla **cross(*u*,*v*)**

Muodostetaan kaksi pystyvektoria:

```
>> u = [-1; 2; 0]
u =
    -1
     2
     0
>> v = [2; 3; 4]
v =
     2
     3
     4
```

Näiden skalaaritulo on

```
>> dot(u,v)
ans =
     4
```

ja vektoritulo on

```
>> cross(u,v)
ans =
     8
     4
    -7
```

Vektoritulo on pystyvektori.

Skalaaritulo voidaan laskea myös seuraavasti:

```
>> u*v
ans =
     4
```

n-vektorin eli n-dimensioisen vektorin $\boldsymbol{x}$ itseisarvo eli normi

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_n^2}$$

lasketaan komennolla **norm(*x*)**.

TEHTÄVIÄ

1. Vektoreiden u ja v välinen kulma α lasketaan kaavalla

$$\alpha = \arccos\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}.$$

Määritä tätä kaavaa käyttäen vektoreiden

$\begin{bmatrix}2 & -2 & 0{,}4\end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix}4{,}5 & 3 & -3\end{bmatrix}$

välinen kulma.

13.3 Ominaisarvot ja ominaisvektorit

13.3.1 Teoriaa

Olkoon A $n{\times}n$-matriisi. Luku λ on matriisin A **ominaisarvo**, jos on olemassa n-vektori $\underline{x} \neq \underline{0}$ siten, että

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x}.$$

Vektoria $\underline{x}$ sanotaan matriisin A **ominaisarvoon λ liittyväksi ominaisvektoriksi.**

$n{\times}n$-matriisilla on

- *n ominaisarvoa*, jos ominaisarvot luetellaan kertalukujensa mukaisesti.
- *korkeintaan n lineaarisesti riippumatonta* ominaisvektoria.

$n{\times}n$-matriisi on **yksinkertainen,** jos sillä on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.

Ominaisvektori ei ole yksikäsitteinen: jos $\underline{x}$ on ominaisvektori, on myös $t\underline{x}$ ominaisvektori jokaisella luvulla $t \neq 0$. Usein ominaisvektorit normeerataan asettamalla ne yksikkövektoreiksi.

Lause 1: Olkoon D lävistäjämatriisi, jonka lävistäjäalkiot ovat λ_i

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ja V $n{\times}n$-matriisi, jonka pystyriviosituksessa

$$V = \begin{bmatrix}\underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n\end{bmatrix}.$$

sarakevektorit $\underline{v}_i \neq \bar{0}$.

Tällöin luvut λ_i ovat matriisin A ominaisarvot ja vektorit $\underline{v}_i$ vastaavat ominaisvektorit jos ja vain jos seuraava yhtälö pätee:

$$AV = VD. \qquad (*)$$

Todistus: Koska[5]

$$AV = A[\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \cdots \quad \underline{v}_n] = [A\underline{v}_1 \quad A\underline{v}_2 \quad \cdots \quad A\underline{v}_n]$$

ja

$$VD = [\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \cdots \quad \underline{v}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1\underline{v}_1 \quad \lambda_2\underline{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\underline{v}_n]$$

voidaan yhtälö (*) esittää muodossa

$$[A\underline{v}_1 \quad A\underline{v}_2 \quad \cdots \quad A\underline{v}_n] = [\lambda_1\underline{v}_1 \quad \lambda_2\underline{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\underline{v}_n].$$

Vertaamalla pystyvektoreita nähdään, että tämä on yhtäpitävä seuraavan ehdon kanssa:

$$A\underline{v}_i = \lambda_i\underline{v}_i,$$

kun $i = 1, 2, \ldots, n$. Tämä merkitsee, että luvut λ_i ovat matriisin ominaisarvot ja vektorit $\underline{v}_i$ vastaavat ominaisvektorit. □

Matriisi A on **diagonalisoituva**, jos se on similaarinen lävistäjämatriisin kanssa eli on olemassa ei-singulaarinen matriisi V siten, että

$$V^{-1}AV = D,$$

missä D on lävistäjämatriisi.

Tällöin

$$AV = VD. \qquad (**)$$

Lauseen 1 mukaan tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että matriisin D lävistäjäalkiot ovat matriisin A ominaisarvoja ja matriisin V pystyvektorit vastaavia ominaisvektoreita. Koska $n \times n$-matriisi on ei-singulaarinen jos ja vain jos sen pystyvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, päädytään seuraavaan tulokseen:

Lause 2: Matriisi on yksinkertainen jos ja vain jos se on diagonalisoituva.

Yhtälöstä (**) saadaan yksinkertaiselle matriisille **ominaisarvohajotelma**

$$A = VDV^{-1}.$$

13.3.2 Laskenta

Matriisin A *ominaisarvot* lasketaan komennolla

eig(A),

joka tulostaa ominaisarvot pystyvektorina.

Esim. Muodostetaan 3×3-satunnaismatriisi ja lasketaan sen ominaisarvot.

```
>> B = fix(10*rand(3))
B =
```

[5] Ositetuilla matriiseilla lasketaan samaan tapaan kuin tavallisilla matriiseilla.

```
         4     9     4
         6     7     9
         7     1     9
>> eig(B)
ans =
   18.4136
   0.7932 + 2.4818i
   0.7932 - 2.4818i
```

Matriisilla on yksi reaalinen ja kaksi imaginaarista ominaisarvoa.

Matriisin *A ominaisarvot ja ominaisvektorit* lasketaan komennolla

[V, D] = eig(A),

joka tulostaa kaksi $n \times n$-matriisia:

- **D** on lävistäjämatriisi $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, jonka lävistäjäalkiot ovat matriisin **A** *ominaisarvot.*
- **V** on matriisi, jonka i:s sarake muodostaa ominaisarvoon λ_i liittyvän *ominaisvektorin.* Ominaisvektorit on normeerattu yksikkövektoreiksi.

Lauseen 1 mukaan näille matriiseille pätee

$$AV = VD. \qquad (*)$$

Yksinkertaisen matriisin tapauksessa komennon

[V, D] = eig(A),

tulostama matriisi **V** on ei-singulaarinen, jolloin matriisille voidaan muodostaa ominaisarvohajotelma

$$A = VDV^{-1}.$$

Esim. Muodostetaan 3×3-satunnaismatriisi.

```
>> A = 10*rand(3,3)
A =
    9.5013    4.8598    4.5647
    2.3114    8.9130    0.1850
    6.0684    7.6210    8.2141
```

Lasketaan sen ominaisarvot ja ominaisvektorit

```
>> [V, D] = eig(A)
V =
   -0.6571   -0.7865    0.7614
   -0.2275    0.3771   -0.6380
   -0.7186    0.4892    0.1154
D =
   16.1753         0         0
         0    4.3321         0
         0         0    6.1210
```

Matriisin V pystyvektorit ovat ominaisvektoreita. Ne ovat yksikkövektoreita:

```
>> norm(V(:,1)),norm(V(:,2)), norm(V(:,3))
ans =
     1
ans =
     1
ans =
     1
```

Tarkistetaan, että matriisi A similaarinen lävistäjämatriisin kanssa:

```
>> V^(-1)*A*V
ans =
   16.1753    0.0000    0.0000
    0.0000    4.3321    0.0000
    0.0000   -0.0000    6.1210
```

Muodostetaan matriisin A ominaisarvohajotelma:

```
>> V*D*V^(-1)
ans =
    9.5013    4.8598    4.5647
    2.3114    8.9130    0.1850
    6.0684    7.6210    8.2141
```

Esim. Ei-diagonalisoituva matriisi.

```
>> A = [6 12 19; -9 -20 -33; 4 9 15]
A =
     6    12    19
    -9   -20   -33
     4     9    15
```

Lasketaan ominaisarvot ja ominaisvektorit:

```
>> [V, D] = eig(A)
V =
   -0.4741   -0.4082   -0.4082
    0.8127    0.8165    0.8165
   -0.3386   -0.4082   -0.4082
D =
   -1.0000         0         0
         0    1.0000         0
         0         0    1.0000
```

Ominaisarvot ovat matriisin D lävistäjäalkiot: -1 ja 1, joista 1 on kaksinkertainen ominaisarvo. Ominaisvektorit ovat matriisin V pystyvektorit. Havaitaan, että matriisin V toinen ja kolmas pystyvektori ovat samoja. Ominaisarvoon 1 liittyy vain yksi ominaisvektori. Matriisi V on singulaarinen ja matriisi A ei ole diagonalisoituva.

Olkoon A ja B $n{\times}n$-matriiseja. **Yleistetyssä ominaisarvotehtävässä** on määrättävä luku λ ja n-vektori $\underline{x} \neq \underline{0}$ siten, että

$$A\underline{x} = \lambda B\underline{x}.$$

Lukua λ sanotaan **yleistetyksi ominaisarvoksi** ja vektoria $\underline{x}$ vastaavaksi **yleistetyksi ominaisvektoriksi.**

Matriisien A ja B *yleistetyt ominaisarvot* lasketaan komennolla

eig(A,B),

joka tulostaa ominaisarvot pystyvektorina.

Matriisien A ja B *yleistetyt ominaisarvot ja ominaisvektorit* lasketaan komennolla

[V, D] = eig(A,B),

joka tulostaa kaksi $n{\times}n$-matriisia:

- **D** on lävistäjämatriisi, jonka lävistäjäalkiot ovat *yleistetyt ominaisarvot.*
- **V** on matriisi, jonka pystyvektorit ovat vastaavia *yleistettyjä ominaisvektoreita.*

Näille matriiseille pätee

$$AV = BVD\,.$$

TEHTÄVIÄ

1. Määritä seuraavien matriisien ominaisarvot ja ominaisvektorit. Tarkista päteekö ominaisarvohajotelma.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 & 4 \\ -3{,}4 & 2 & 0 & -7 \\ 2 & 0 & 2{,}6 & 4 \end{bmatrix}$